やまぶき
埼玉及び近郊の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

第43号　平成二九年（二〇一七）一月二三日
発行部数　十五部　（不定期刊行）
発行者　東京都羽村市　山口　正義

碓氷峠の熊野神社の算額（二）

四、熊野神社（群馬側）の算額の解法

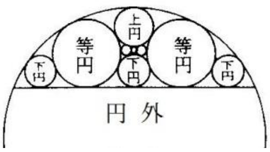
前号で熊野神社（群馬側）の算額の解法について「次号で述べる予定」と書きましたが、内容も調べないまま書いたことに自責の念に駆られました。実はこの算額の問題、中途半端な知識では解けない問題でした。

まず一問目で参りました。平面幾何の問題なので直ぐに解けるだろうと思って取り組んだら、とんでもない事でした。二問目、四問目は反転法で解く問題でしょうが、六問目の問題も難しく解けませんでした。文献などを参考にして述べますが、何れも既に解かれている問題ですので新規性は全くありません。

（前号に算額の全文を示してあります）

【一問目】

一問目は下図で等円径が１寸のとき外円径を求めるもの。答



は４寸とあり、術文は等円径の４倍とあるだけです。

次のように単純に考えて解こうとしましたが……

他の方法も考えましたがやはり計算しきれず解けませんでした。

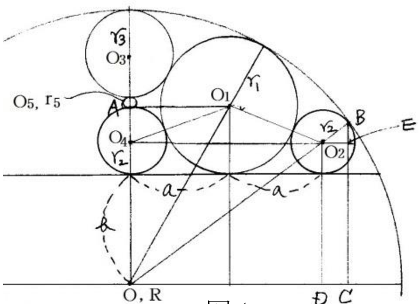
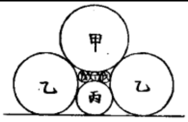


図１

円O_1、O_2、O_4の関係は一義的に決まるので円O_3（半径r_3）は無関係とし、r_1、r_2、Rの関係式を求め、r_2を消去してr_1とRの関係を導く。
△OO_2O_4と△OO_1Aで鈎弧弦を適用し、
$$b=\frac{6r_1r_2}{r_1-r_2}-R$$
$$r_2=0.5\left\{-(4r_1+3R)+3\sqrt{(4r_1+R)R}\right\}$$
が求まる。もう一つの関係式は△OO_2Dと△O_2BEの相似形から求まり、それにr_2を代入してRを求むべきも、複雑になり計算しきれませんでした。

仕方なく文献１を見ました。

その手法は驚いたことにある「関係式」を前提に解いていました。その式は次のようなもので、『浅致算法』(2)（せんちさんぽう）（平野喜房、文久三年）からのものです。



今有如図直線載七円　甲円径六寸
丁円径一寸問丙円径幾何
答曰丙径四寸七分六厘
術曰以甲丁径差除甲径倍之自之乗
丁径内減丁径余得丙径合問

術文は「甲丁の差を以て甲を除し之を倍にし自乗し丁を乗じ丁を減じて丙を得る」というものです。

円甲乙丙丁（丁は甲と丙に挟まれて接する小円）の半径をa,b,c,dとすると、術文は　丙$=\left(\dfrac{2甲}{甲-丁}\right)^2$丁$-$丁　、つまり

$2c=\left(\dfrac{2\cdot 2a}{2a-2d}\right)^2\cdot 2d-2d=\dfrac{2(a+d)(3a-d)d}{(a-d)^2}$　、$\therefore c=\dfrac{(a+d)(3a-d)d}{(a-d)^2}$ … ①

文献１には次の式もあります（浅致算法にはないが容易に算出可能）。

$b=\dfrac{(c+d)(a+c+d)}{a+d}$ … ②

文献１は①②と図１で△OO_2O_4に鈎弧弦を適用するなどして次の式を導いている。

$3a^5-13a^4d-26a^3d^2-2a^2d^3+7ad^4-d^5=0$ … ③

これを因数分解して、$(a+d)^2(d-3a)(a^2-6ad+d^2)=0$ … ④

従って、$d=(3-2\sqrt{2})a$ … ⑤

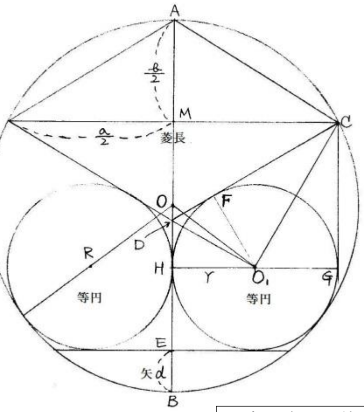
①②⑤から、$R=2(2+2\sqrt{2})a=4b=4\times 0.5=2$　、$2R=4$

①②を利用していることや、③の因数分解などもあって簡単には解けない問題でした。

【三問目】

三問目は図で菱長が８寸、等円径が４寸のとき矢を求めるもの（菱辺ＣＤは等円とＦで接している）。答は１寸、術文は「菱長から等円径を減じたもので等円径の冪乗(自乗)を除し之を４で除し矢を得る」というもの。

文献１は等円と直線ＣＤの式を出し、それが接するということで代数的に解いています。解き方は巧妙です。しかし、当時座標軸を使って円や直線の式で解いたのかは疑問です。



次の二つの関係はすぐ求まる。

$\triangle OHO_1$で　$(R-r)^2 = r^2 + (R-r-d)^2 \cdots$①

$\triangle AMC$と$\triangle ACB$は相似形だから

$\dfrac{b}{2} : \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2} : \left(2R - \dfrac{b}{2}\right) \cdots$②

①②から

$b = \dfrac{(d+r)^2 - \sqrt{(d+r)^4 - a^2 d^2}}{d} \cdots$③

この後、文献１は座標を使って円O_1と直線CDの式を出し接し条件と①②から次の関係式をうまく出している。

$$\left\{(2r-a)d + r^2\right\}^2 \left\{4a^2 d^2 (d+r)^2 - 4a(d+r)^3 (ad + r^2) + a^2 (ad + r^2)^2\right\} = 0 \cdots ④$$

$\therefore (2r-a)d + r^2 = 0$

$\therefore d = \dfrac{r^2}{a-2r} = \dfrac{(2r)^2}{4(a-2r)} = \dfrac{4^2}{4(8-4)} = 1 \cdots$ ⑤

一方、座標を使わなくても次のようにできる筈です。

CDは円O_1で接しているから

$DH = DF = 2R - b - r - d$

与条件は$a = 8, r = 2$だから$MC = HG$

従ってCGはGで円O_1に接している。

$\therefore CF = CG = MD + DH$

$\quad = 2R - 0.5b - r - d$

$\therefore CD = CF + DF = 4R - 1.5b - 2(r+d)$

$\triangle CMD$で、$CD = 0.5\sqrt{a^2 + b^2}$

$\therefore \sqrt{a^2 + b^2} = (8R - 3b) - 4(r+d) \cdots$⑥

⑥に①③を入れてR, bを消去して次式を得る。

$$(32a^2 - 512r^2)d^5 + (464a^2 - 2304r^2)rd^4 - (81a^4 - 912a^2 r^2 + 4096r^4)d^3 + (560a^2 - 3584r^2)r^3 d^2 + (80a^2 - 1536r^2)r^4 d - 256r^7 = 0 \cdots ⑦$$

⑦が④に等しいか未検証だが、$a = 8, r = 2$を④、⑦に入れると、共に次式になる。

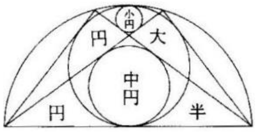
$5d^4 - 20d^3 + 21d^2 - 2d - 4 = 0 \cdots$ ⑧

$\therefore (d-1)(5d^3 - 15d^2 + 6d + 4) = 0 \cdots$ ⑨

(⑦を因数分解するのは難しく筆者には不可能)

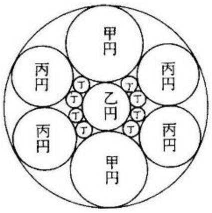
【四問目】

四問目は前号の熊野皇大神社(長野側)の二問目と同類の問題です。大円径が９寸のとき中円径と小円径を求めるもの。答は中円が６寸、小円が２寸。術文は「大円を二倍して三で割り中円を、中円を三で割り小円を得る」。文献１は三角関数を用いて解いていますが当時の解法とは思えません。前号参照。



【六問目】

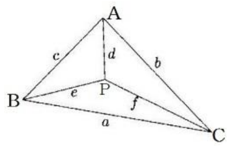
難問です。下図のように大円内に甲乙丙丁など15個の円が互いに接するようにあるとき、乙円径を知って甲円径を表せというもので、術文は「1152を置いて平方に開き44を加え乙を乗じ49で除して甲円径を得る」というものです。



術文を式で示します

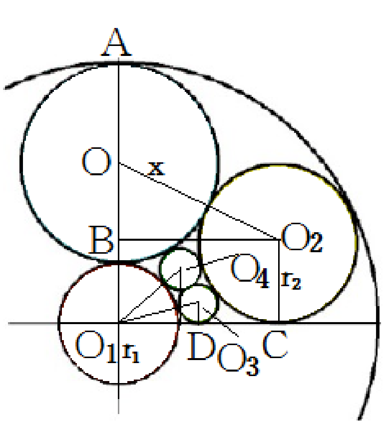
甲円径 $= \dfrac{\sqrt{1152} + 44}{49} \times$ 乙円径

文献１の解法から述べます。まず予備定理として『発微算法』で解かれたものを持ってきています。つまり『古今算法記』の遺題(本誌第40号参照)の第12問目の解で、下のように三角形の各辺の長さと三角形内の一点Ｐと各頂点との長さを決めたときの関係式です。



$$a^2 d^2 (b^2 + c^2 + e^2 + f^2) - a^2 d^4 - a^4 d^2 + b^2 e^2 (a^2 + c^2 + d^2 + f^2) - b^2 e^4 - b^4 e^2 + c^2 f^2 (a^2 + b^2 + e^2 + d^2) - c^2 f^4 - c^4 f^2 - a^2 b^2 c^2 - a^2 e^2 f^2 - b^2 f^2 d^2 - c^2 d^2 e^2 = 0 \cdots ①$$

次に図で幾つかの関係式を求めます。



$\triangle OBO_2$で、$(x+r_2)^2=(x+r_1-r_2)^2+BO_2^2$　…②

$\triangle BO_1O_2$で、$(2x+r_1-r_2)^2=r_2^2+BO_2^2$　…③

$\triangle O_1DO_3$で、$(r_1+r_3)^2=r_3^2+DO_1^2=r_3^2+(CO_1-CD)^2$

$$=r_3^2+\left\{\sqrt{(x+r_2)^2-(x+r_1-r_2)^2}-2\sqrt{r_2r_3}\right\}^2 \cdots ④$$

②③からr_2を求め④に代入してr_2を消去

$$4x^4+4r_1x^3-8r_3x^3-3r_1^2x^2-20r_1r_2x^2+4r_3^2x^2-2r_1^3x-12r_1^2r_3x+r_1^4=0 \cdots ⑤$$

ここでまず$\triangle OO_1O_2$に予備定理を使い⑥（省略）を得、次に$\triangle O_1O_2O_4$に予備定理を使い⑦（省略）を得る。⑥⑦からr_4を消去し⑧（省略）を得、⑤⑧からr_3を消去して次のr_1とxの式を得る。

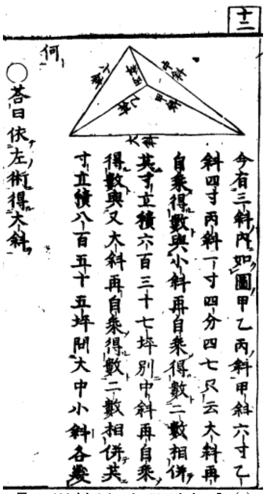
$$384368r_1^3x^{11}+465724r_1^4x^{10}-588640r_1^5x^9-1035418r_1^6x^8-102848r_1^7x^7+489692r_1^{11}x^6+219776r_1^9x^5-37855r_1^{10}x^4-40624r_1^{11}x^3-5024r_1^{12}x^2+1280r_1^{13}x+256r_1^{14}=0 \cdots ⑨$$

⑨を因数分解する

$$(x+r_1)^4(49x^2-88r_1x+16r_1^2)\times(256x^8-1824r_1x^7+2641r_1^2x^6+1860r_1^3x^5-1226r_1^4x^4-852r_{15}x^3+49r_1^6x^2+104r_1^7x+16r^8)=0 \cdots\cdots ⑩$$

$$\therefore\quad x=\frac{44+\sqrt{1152}}{49}r_1$$

初めの予備定理のP点はO_4で、次の予備定理のP点は三角形の外側のO_3です。この予備定理を使うことまでは中々思いつかないし、且つ⑨まで出すのは相当な計算をすることになります。さらに⑨を因数分解するのは難しく、結果が分かっていなければ出来そうにありません。その計算力には驚くばかりです。掲額者の伊香保の木暮篤太郎はどのようにこの問題を扱ったのでしょうか。

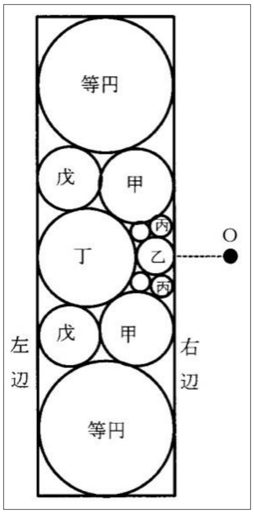

十二
今有三斜内如圖甲乙丙斜甲斜六寸乙斜四寸丙斜一寸四分四七只云大斜再自乘得數與小斜再自乘得數二數相併共寸立積六百三十七坪別中斜再自乘得數又大斜再自乘得數二數相併共寸立積八百五十五坪問大中小斜各幾何
○荅曰依左術得大斜

『発微算法演段諺解』(3)の予備定理部分(東北大)

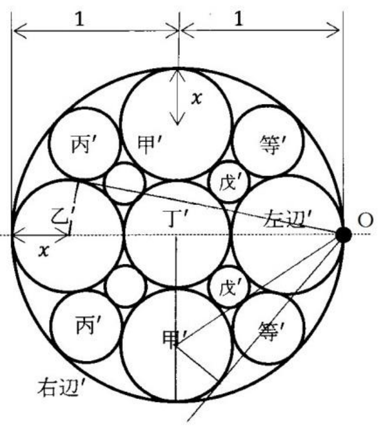
【二問目】

この問題は左図のように長方形内に多くの円が互いに接するように配置されているとき、乙円径が１寸なら甲円径は幾つか、というもの。答は２寸、術文は簡単に乙円径の二倍とあるのみ。

この問題を反転法を使わないで解くのは難しい。反転法については本誌第31号の「慈光寺の算額の一問目」で文献４の中の解法を述べました。この問題も文献４にありますので、それを述べます。



反転法の基本定理は比較的簡単です。問題は反転図をいかにして得るかです。それは反転中心（原点）をどこに置くかで成否が決まるかのようで、経験を積むしかないように思えます。文献４は図のように長方形右辺の右（乙円の右）に原点Oを置いて下図のような反転図を得ています。結果を知ってなぞれば理解できますが、白紙の状態からこの反転図を得るにはやはり少し経験が必要です。



反転図で「右辺’」の円半径を１、「甲’」「乙’」の円半径をxとすると基本定理から次式を得る。

(Oから甲’円への接線の長さ)^2

$$=\frac{2x}{\text{甲円直径}}=1^2+(1-x)^2-x^2$$

$$=2(1-x)\ \cdots ①$$

(Oから乙’円への接線の長さ)^2

$$=\frac{2x}{\text{乙円直径}}=(2-x)^2-x^2$$

$$=4(1-x)\ \cdots ②$$

$$\therefore\ \frac{\text{甲円直径}}{\text{乙円直径}}=2$$

反転図を得たあとの計算は極めて簡単です。

掲額者の上毛松井田驛の金井藤一郎は、反転法に似た「算変法」を理解してこの問題を扱ったということなのでしょうか。

【五問目】【七問目】

取り敢えず省略です。

参考文献
（１）中村信弥『長野県現存算額集大成 絵馬 算額への招待』（電子復刻版）
（２）『浅致算法』（平野喜房、文久三年、東北大和算ポータルサイト）
（３）『発微算法演段諺解』（東北大和算ポータルサイト）
（４）田部井・松本『反転法と算変法』（一粒書房）

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

甲斐　武田神社の現代算額

昨年十月に甲斐善光寺を友人と見学した折、ついでに甲府の武田神社にも行きました。

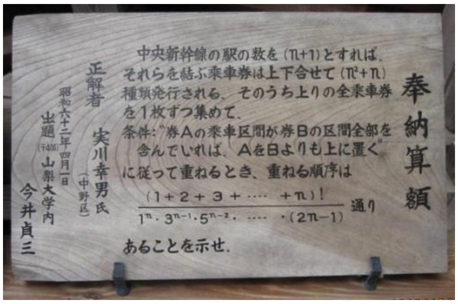
武田神社といえば武田信玄公を祭神として祀っている神社として有名。甲斐の国の総鎮護として崇敬を集めているといいます。

この神社の参道脇にある手水舎には小振りな八面の算額が掲げられています。但し、掲額は一番古いもので昭和五六年、次は同六二年、残りは平成で、最も新しいものは平成二七年。何れにも今井貞三氏（山梨大元教授らしい）の名前があります。

武田神社の手水舎（算額は軒下に掲げられています。この写真はネット上のものを利用しました）

この算額、「現代算額」とでもいうべきものか。何れも「奉納」とは書いてありますが、まず横書きで漢文調ではなく、現代の数学調の文章です。また問文・答文・術文の形にもなっていません。但し内容は現代数学で、難しいようです。

正解者・解答者・証明者の氏名も記されていますので、初めは回答者を募集していたのかも知れません。広く回答者を募集し、回答者が出現したあとに氏名を書き加えたのかも知れません。新たな算額の表現とも思えますが、算額の板にも工夫がなく遊び心も感じられず、私は今一つ興味が沸きませんでした。



〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

編集後記

新聞のコラムに「ラマヌジャン」のことがありました。ラマヌジャン（1887～1920）はインドの偉大な数学者。コラムは理論物理学者によるもので、ラマヌジャンが遺した「失われたノート」に記された公式の講演を聞き、博士論文で活用できたことや、その二十年後にわかった超弦理論の対称性のことなど、極めて高尚なことが書かれていました。

私にはその内容は理解できませんが、一般紙にそのような記事があることに清々しさを感じました。

ネットで「ラマヌジャン」を調べると直ぐに可成りの情報が得られます。「極めて直感的、天才的な閃きにより『インドの魔術師』の異名を取った」と冒頭にあります。多くの定理を発見したが証明という概念を持たなかったため、多くの数学者の協力で証明が行われたが、その作業が完了したのは 1997 年であった、ともあります（和算家も直感を重視し、証明もなかったのは同じです！）。

熊野神社の算額、掲額者のことをもっと知りたいと思いましたが、ちょっと遠くて「現地」調査に行くのは無理そうです。

ラマヌジャンの発見の一例

円周率の発見

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(4^n 99^n n!)^4}$$

円周率の近似式の発見

$$\pi \cong \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3.1415926525\cdots$$