やまぶき

埼玉及び近郊の和算研究の個人通信

（題字　伊藤武夫氏）

2

第40号　平成二八年(二〇一六)　九月一九日

発行部数　十五部　(不定期刊行)

発行者　東京都羽村市　山口　正義

戸塚盛政の算額の解法

戸塚盛政の正観寺（本庄市都島）の算額は第26号で一問目の背景などを述べましたが、問題そのものは述べませんでした。この問題は歴史的な意義があるので、ここでは改めて問題の内容と解法について述べます。26号の記事と併せて見て頂ければ幸いです。

一、問題内容

問題は『古今算法記』（一六七一年）の遺題十五問の五問目と同じ。ただ定数が違います。

> 今有二リ甲乙丙丁戊立方面各一只云甲積ト与二乙積一ト相併テ共ニ寸立積百八拾九坪亦丙丁戊積各三和シテ共ニ寸立積三拾六坪問二甲乙丙丁戊方面各幾何一ト乃甲乙丙丁戊方面之差各同寸也
> 　答曰左術得二戊方面一寸ヲ

（いま甲乙丙丁戊の立方各々一つあり、ただ云う、甲積と乙積と相併せて、共に寸立積百八十九坪、また、丙丁戊積各々三和して共に寸立積三十六坪、甲乙丙丁戊の方面各幾何なるかを問う、乃ち甲乙丙丁戊の方面の差は各同寸なり。答は左術により戊一寸）

「百八十九坪」「三十六坪」のところが、『古今算法記』では「七百坪」「五百坪」となっていますが、このことについては後述。

この算額の一解法を次に示します。

$$\text{甲}^3+\text{乙}^3=189$$

$$\text{丙}^3+\text{丁}^3+\text{戊}^3=36$$

$$\text{甲}-\text{乙}=\text{乙}-\text{丙}=\text{丙}-\text{丁}=\text{丁}-\text{戊}$$

今、戊$=x$とし、同寸をdとすれば、

丁$=x+d$, 丙$=x+2d$, 乙$=x+3d$, 甲$=x+4d$　となり

$$(x+4d)^3+(x+3d)^3=189 \quad \cdots\cdots ①$$

$$(x+2d)^3+(x+d)^3+x^3=36 \quad \cdots\cdots ②$$

①②からdを消去すれば、xの９次方程式が得られるが、これを解くのはやっかいである。

①②を少し変形し、②－①を行えば次式が得られる。

$$55x^3+105dx^2+15d^2x-175d^3=0$$

$$11x^3+21dx^2+3d^2x-35d^3=0$$

$$(x-d)(11x^2+32dx+35d^2)=0$$

これから、$x=1,\quad d=1$ が得られる。

（計算１）

しかし、この解法は一般的な解法ではありません。また術文の内容とは異なります。術文は関孝和の『発微算法』（一六七四年）と同じです。厳密に言うと建部賢弘の『発微算法演段諺解』（一六八五年）と同じです。『発微算法』の当該部分は少し間違いがあるので。

二、術文の解法

> 此本術ヲ求ル者演段以起元前後両式求前式戊面得度数求及相消右式得亦左式求前後両式各偶以用維乗法左式得亦左右式各實維用消長式起元術本術寄左数相消数与而得實列左数与亦識前相乗与以開方式得
> 術ニ曰ク立天元ノ一ヲ為二戊方面一ト再ヒ自二乗之一ニ為二戊積一ト寄二子位一ニ列三併シテ先元数三段ト与二ヲ子一十五段一得内減二又云数七段餘寄二丑位一列二シテ又云数九十段一内併減三ス先云数九段ト与二ヲ子位二百五十五段ト餘寄二寅位一ニ子位冪丑位相乗シテ二千一百八十□□九千五百段子位丑位冪相乗三十六万五千零一十段子位丑位寅位相乗シテ一□七万七千三百三十段右三位相併テ得ル数寄レ左子位寅位冪相乗シテ六千六百段寅位再自乗シテ四十九段右二位相併テ得ル数与レ寄ト左相消テ得二ル開方ノ式ヲ八乗ノ方ニ開レ之得二ル戊方面一ヲ仍推前術一ニ得二甲乙丙丁方面一ヲ各合レ問ニ

術文の前の文は演段（解義。高次方程式の解法）を消長法を以て解くようなことが書いてある（ようです）。術文は『発微算法演段諺

解』と同じです（送り字や返り点の有無は多少あり）。意訳を次に示します。

天元の一を立てて戊とする(未知数を戊とす)。この３乗は戊の体積で子とする。先ず云うの数(189)の３倍と子の15倍を加え、又云うの数(36)の７倍を減じ、その余り（結果）を丑とする。又云うの数(36)の91倍から先ず云うの数(189)の９倍と子の255倍を減じ、その余り（結果）を寅とする。子の２乗と丑と21829500を乗じ、子と丑の２乗と365010を乗じ、子と丑と寅と177330を乗じ、それらを加えて左に寄せる。子と寅の２乗と6600を乗じ、寅の３乗と49を乗じ、それらを加えて左に寄せ、相消し、９乗の式を開いて戊を得る。

これを式で示し、具体的に解くと(計算２)

甲 $=u$, 乙 $=v$, 丙 $=w$, 丁 $=y$, 戊 $=x$ とし、
先云数 $=a$, 又云数 $=b$ とすれば、条件から

$u^3+v^3=a=189$ …①

$w^3+y^3+x^3=b=36$ …②

$u-v=v-w=w-y=y-x$ …③

③は方面差を d とすれば、

$y=x+d,\ w=x+2d,\ v=x+3d,\ u=x+4d$ …④

術文から

丑 $=3a+15x^3-7b=315+15x^3$ …⑤

寅 $=91b-9a-255x^3=1575-255x^3$ …⑥

左 $=$ 丑 $x^3(21829500x^3+365010$ 丑 $+177300$ 寅$)$ …⑦

右 $=$ 寅 $^2(6600x^3+49$ 寅$)$ …⑧

⑦－⑧を計算して次の９次式を得る。

$114604875x^9-9482437125x^6$
$+200810066625x^3-191442234375=0$ …⑨

以下は算額にはありませんが、⑨を約分すると

$77x^9-6371x^6+134919x^3-128625=0$ …⑩

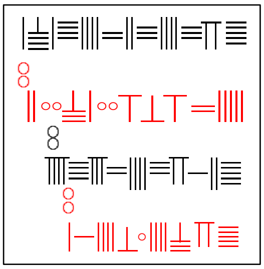
$(x-1)\{77(x^8+x^7+x^6)-6294(x^5+x^4+x^3)$
$+128625(x^2+x+1)\}$ …⑫

これから、$x=1$ が得られる。

（計算２）

のようになりますが、原文は９乗（９次）の式の解き方までは述べていません。

なお、算額には算木による天元術の式が次のように書かれていますが、これは⑨式と全く一致しています（赤は正数、黒は負数）。



（黒　赤　赤　黒　黒　赤　赤）

算木は上から以下に示すように９次式になってます。x は省略されています。

-191442234375
$+200810066625x^3$
$-9482437125x^6$
$+114604875x^9=0$

三、『発微算法』の解法

『古今算法記』にある元々の問題は既述のように、（計算２）の定数189は700、36は500です。そうなると（計算２）で示したようには簡単には解答が得られません。算額の問題できれいな値が得られるのは、逆算して189と36を選んだのではないかと思います。

そして、そもそも、丑や寅の値、それに21829500や365010といった値はどのように導かれたのかがわかりません。

文献(２)には、「二つの未知数を含んだ二つの式から、一方の未知数を消去して、一つの未知数の方程式（開方式）を導いて解を求める。その方式が使われている」として、消去法でこの問題の解法を解説しています。

１．a,b を x と d で表す（④を利用）。

$a=91d^3+75d^2x+21dx^2+2x^3$ …⑬

$b=9d^3+15d^2x+9dx^2+3x^3$ …⑭

２．この２式からまず dx^2 項を消去した式を作る。

⑬×3－⑭×7を行って

$t=3a-7b+15x^3=210d^3+120d^2x$ …⑮

次に d^3 項を消去した式。⑭×91－⑬×9を行う。

$s=-9a+91b-255x^3=690d^2x+630dx^2$ …⑯

３．⑮⑯で d の多項式として高次の項から順に係数一致するように変形を繰り返す。t は d の3次式、s は d の2次式だから、t^2, s^3 を掛ける所から始める。

$t1=30\times 23^3t^2x^3=16096941000d^6x^3+18396504000d^5x^4$
$+5256144000d^4x^5$

$s1=7^2s^3=16096941000d^6x^3+44091621000d^5x^4$
$+40257567000d^4+12252303000d^3x^6$

$t2=t1+177330tsx^3=16096941000d^6x^3+44091621000d^5x^4$
$+43399827000d^4x^5+13406145000d^3x^6$

$s2=s1+6600x^3s^2=16096941000d^6x^3+44091621000d^5x^4$
$+43399827000d^4x^5+17990343000d^3x^6+2619540000d^2x^7$

$t3=t2+21829500x^6t=16096941000d^6x^3+44091621000d^5x^4$
$+43399827000d^4x^5+17990343000d^3x^6+2619540000d^2x^7$

４．この結果、$s2$ と $t3$ の右辺が同じ式になり、$t3$ は⑦に、$s2$ は⑧に等しくなる。（丑 $=t$, 寅 $=s$）

（計算３）

それを(計算３)に示します。私がきちんと理解したか覚束ない所ですが、関孝和が如何に巧妙に解いたかの一端に触れる思いがしました。

建部賢弘の『発微算法演段諺解』の解法も見てみました。七頁に渡って解いています。その解法は文献（３）に解説があります。導入部分の「前式・後式」の所が理解できていませんが、大筋は理解しました。文献（２）とほぼ同様です（というか、こちらが本家）。

四、田中由真の解法

既述のように『古今算法記』（一六七一年）の遺題を関孝和は『発微算法』で三年後に解いていますが、さらに四年後、田中由真も『算法明解』（一六七八年）で解いています。

文献（２）から引用して概要のみ次に示します。戸塚盛政の算額の値を入れれば正解が得られます。

なお、宮城清行も『和漢算法』（一六九五年）の中で解いています。私はこの書物をネットオークションで手に入れましたが解読は出来ていません。

> 甲をx, 乙をyとし、
> $y^3=a-x^3$、$b+36x^3=t^3$とする。
> $970299y^9+94500x^3y^6+3375000x^6y^3+297t^6y^3 \to$ 左
> $94500x^3y^3t^3+29403y^6t^3+t^9 \to$ 右
> 左右として、に対する開方式
> ９次方程式を得る。
> ここに出て来る数字もこのままでは不明だが、詳細は省略。

五、数値解

『古今算法記』の遺題はどれも高次の一元方程式になり、72次とか、最高は1458次の式になるといいます。それだけに具体的な数値解は今までなかったようです。

文献（４）は「グレブナー基底」とかいう私は全く知らない方法で遺題の数値解を求めています。第五問目の解として下のようにあります。

第５問目の数値解
甲方面＝7.3488063502149911295
乙方面＝6.7175159515506248173
丙方面＝6.0862255528862585051
丁方面＝5.4549351542218921929
戊方面＝4.8236447555575258807
方面差＝0.6312903986643663122

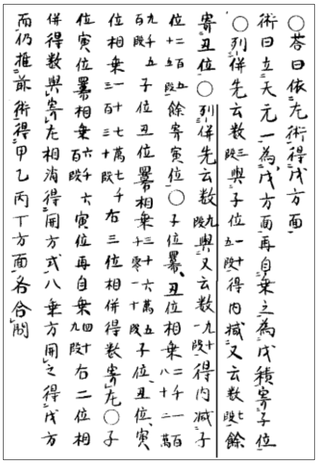
参考文献

（１）『発微算法』『発微算法演段諺解』『算法明解』東北大和算ポータルサイト

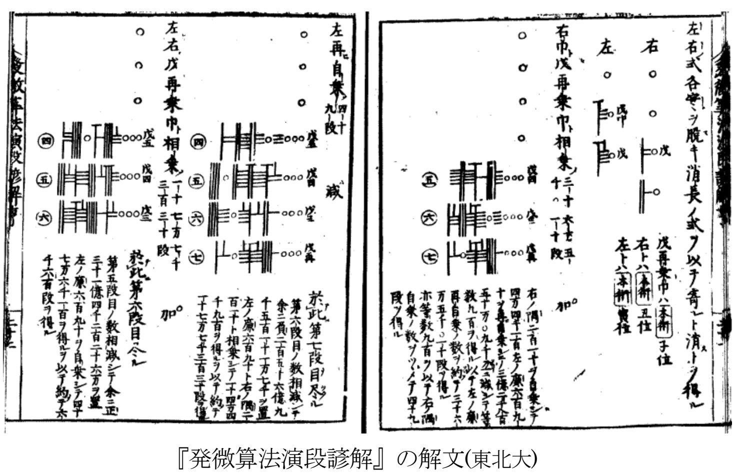
（２）竹之内脩「古今算法記の遺題について」京大数理解析研、1317巻2003年220～226

（３）『明治前日本数学史第三巻』日本学士院

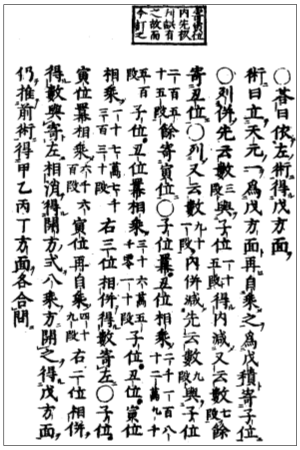
（４）荒井・森継「古今算法記遺題の数値解について」京大数理解析研、1568巻2007年87～93



『発微算法』の術文(東北大、写本、版木焼失前の原文とあり)。棒線部分の書順に間違いあり。

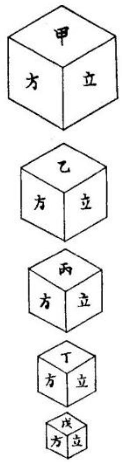


『発微算法演段諺解』の解文(東北大)
７頁に渡って解いています。



『発微算法演段諺解』の術文(東北大)。『発微算法』の間違いは訂正されている。

今有ニリ甲乙丙丁戊立方面各一只云甲積ト与ニ乙積一ト相併テ共ニ寸立積百八拾九坪亦丙丁戊積各三和シテ共ニ寸立積三拾六坪問ニ甲乙丙丁戊方面各幾何一ト乃甲乙丙丁戊方面之差各同寸也



答曰左術得ニ戊方面一寸ヲ

此本術ヲ求ル者演段以起元前後両式求前式戊面得度数求及相消右式得亦左式求前後両式各偶以用維乗法左式得亦左右式各實維用消長式起元術本術寄左数相消数与而得實列　左数与亦識前相乗与以開方式得

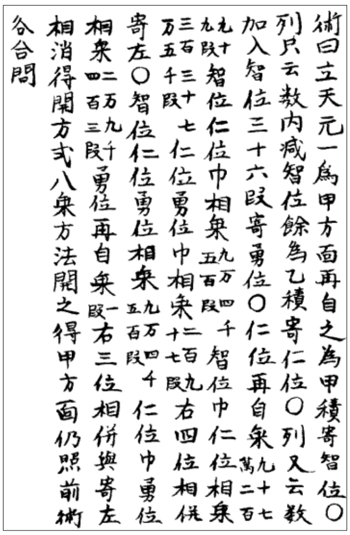
一術ニ曰ク立天元ノ一ヲ為ニ戊方面一ト再ヒ自ニ乗之一ニ為ニ戊積一ト寄ニ子位一ニ列ニ併シテ先元数三段ト与ニヲ子一十五段一得内減ニ又云数七段餘寄ニ丑位一列ニシテ又云数九十一段内併減ニス先云数九段ト与ニヲ子位ニ二百五十五段ト餘寄ニ寅位一ニ子位冪丑位相乗シテ二千一百八十□□九千五百段子位丑位冪相乗三十六万五千零一十段子位丑位寅位相乗シテ一□七万七千三百三十段右三位相併テ得ル数寄レ左子位寅位冪相乗シテ六千六百段寅位再自乗シテ四十九段右二位相併テ得ル数与レ寄ト左相消テ得ニルル開方ノ式ヲ八乗ノ方ニ開レ之得ニル戊方面ヲ一仍推前術ニ得ニ甲乙丙丁方面ヲ一各合レ問ニ

算木の図

式

商戊方面一寸得也

戸塚盛政の算額の一問目の全文(上)と復元算額写真(下)
(数字で一部判読不明があるが、解法から判明する)


術曰立天元一為甲方面再自之為甲積寄智位〇
列只云数内減智位餘為乙積寄仁位〇列又云数
加入智位三十六段寄勇位〇仁位再自乗九十七萬二百
九十九段智位仁位巾相乗九万四千五百段智位巾仁位相乗
三百三十七万五千段仁位勇位巾相乗二百九十七段右四位相併
寄左〇智位仁位勇位相乗九万四千五百段仁位巾勇位
相乗二万九千四百三段勇位再自乗一段右三位相併與寄左
相消得開方式八乗方法開之得甲方面仍照前術
各合問

『算法明解』の術文(東北大)

編集後記

戸塚盛政の算額は『埼玉の算額』にありません。この算額を知ったのは昔の『埼玉史談』の野口先生の記事。先生に感謝です。

最近「自動運転」の話題が多く、興味を持ちます。自動化のレベルには1~4があり、4になると完全自動走行で運転者が全く関与しない状態という。実現目標が2020年代との話もある。本当か。待てよと云いたい。

「自動運転革命」というテレビ番組を見た。如何に技術的に対応できるかという挑戦の物語のようでもあった。それは車を動かす側の話。確かに技術的にはかなり進歩するだろう。しかし、どうしても解決できない問題も沢山あると思う。仮に全て解決したとしても、本当に社会から受け入れられるのか。番組では歩行者側のことは伝えられなかったように思う。例えば私は横断歩道を渡る時、青信号でも車が来たら運転者と目が合うように顔を見る。大丈夫と思ったら渡る、というようなことを行う。走っている車が全て自動運転だったらと思うと横断歩道も渡れなくなる。