やまぶき
埼玉北西部の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

第31号　平成二七年（二〇一五）一一月二一日
発行部数　十五部　（不定期刊行）
発行者　東京都羽村市　山口　正義

慈光寺の算額の一問目

一章、はじめに

埼玉県比企郡ときがわ町の慈光寺の算額（文政十三年）については、第17号の中で久田善八郎の説明に絡んで少しだけ触れました。

この算額には三問あり、一問目（田中與八郎）は容題、二問目（馬場與右衛門）は穿去問題、三問目（久田善八郎）は楕円体積の問題です。三人とも市川行英の門人です。

三上義夫はこの算額を評して、「恐らく県内幾多の現存諸算額中の白眉といってもよいものであろう」（「算額雑攷」昭和17年）と述べています。残念ながら傷みがひどく今は公開されていません。

さて、この算額の二、三問目はかつて解いたことがありますが、一問目は「いつでも解けるから」との思いで放っていました。しかしどこか心の片隅で気になっていました。やっと重たい腰を上げて解いてみることにしました。そしたら関係式は直ぐに出ますが、具体的に解くとなると変数の消去などが思うに任せず、難渋してしまいました。

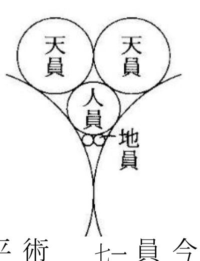
仕方なく『算額を解く』（大原茂氏、平成10年）を見て理解しました。これだけでは何の変哲もない話なので、幾つかの、解法を示している書物も検討してみることにしました。

調べたのは、『算額を解く』の他に、『算法雑俎解』（梅村重得、明治3年）、『算法点竄手引草』（山本賀前、天保4年）、『算法雑俎解義』（岩井重遠・白石長忠）、それに『反転法と算変法』（田部井勝稲・松本登志雄氏、平成26年）です。最後のは反転法によるもので、慈光寺の一問目の解法例が掲載されています。これを理解することで反転法を少し理解することができました。『算法雑俎解義』の解法は極形術（きょくぎょうじゅつ）によるものなのか、理解するまでには至りませんでした。

二章、一問目の内容

一問目の内容は次のようなものです。

今有如圖以等弧背抱五員天員徑六十八寸地員徑十七寸問人員徑幾何
答曰人員徑六十四寸
術曰以地徑除天徑名極平方開之六之加極及一個以除天徑一十六之得人徑合問（員は円のこと）



（今図のように互いに接する等しい円の円弧の間に五つの円を接するようにして、天円の直径が六十八寸、地円の直径が十七寸のとき、人円の直径はどれほどか。

答に曰く人円の直径は六十四寸

計算方法は、地径（地円の直径）で天径（天円の直径）を割り極と名づける。之を平方開し六倍し極及び一を加えたもので天径の十六倍を割り問に合う人径（人円の直径）を得る）

術文を式で表せば下のようになります。

以下の解法では、天(上)円径をk、人(甲)円径をx、地(乙)円径をl、弧(乾、下とも)円径をmとします。

天円、人円、地円の直径をそれぞれk、x、lとし、$h=\dfrac{k}{l}$としたとき、$x=\dfrac{16k}{6\sqrt{h}+h+1}$

今、$k=68$、$l=17$、$h=68/17=4$とおけば、

$x=\dfrac{16\times 68}{6\sqrt{4}+4+1}=\dfrac{1088}{17}=64$（寸）

三章、「算額を解く」の解法

第１図をもとに計算します。

第１図からすぐに

$AD^2 = km$、$AD = \sqrt{km}$　… ①

$AB^2 = \left(\frac{k}{2}+\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{2kx+x^2}{4}$、 $AB = \frac{\sqrt{2kx+x^2}}{2}$ …②

$BD^2 = \left(\frac{m}{2}+\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{2mx+x^2}{4}$、 $BD = \frac{\sqrt{2mx+x^2}}{2}$ …③

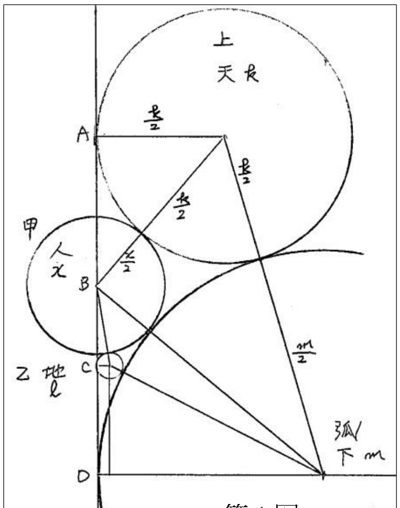
$BC^2 = \left(\frac{l}{2}+\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{2lx+x^2}{4}$、 $BC = \frac{\sqrt{2lx+x^2}}{2}$ …④

$CD^2 = \left(\frac{m}{2}+\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}-\frac{l}{2}\right)^2 = lm$、 $CD = \sqrt{lm}$ …⑤

ここで、 $AD - CD = AB + BC$ …⑥

$AD - AB = BD$ … ⑦

方針は、⑥よりmを求め、⑦に代入してmを消去して x の方程式から求める解を得る、というもの。
しかし単純には求められない。



第１図

四章、『算法雑俎解』の解法

東北大にある原本を見ると（ネットからダウンロード）、文字が滲んでいて見づらい個所もありますが前後関係からほぼ解読できます。


『算法雑俎解』の原文（東北大）

⑥より、

$2\sqrt{m} = \frac{\sqrt{2kx+x^2} + \sqrt{2lx+x^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{l}}$、 また $4m = $(省略)‥⑧

⑦より、 $4m(2k-x) - 8\sqrt{m}\sqrt{k(2kx+x^2)} + 4kx = 0$ …⑨

⑧を⑨に代入して整理して行くとxの4次式になるがx^4, x^3, x^2の項は消えて行き、結局次のようなxの一次式になる。（この間かなりの計算）

$$\left(k^2 + l^2 + 4k\sqrt{kl} - 10kl + 4l\sqrt{kl}\right)x = 16kl\left(k - 2\sqrt{kl} + l\right)$$

$$\therefore\ \left(k + l + 6\sqrt{kl}\right)\left(k - 2\sqrt{kl} + l\right)x = 16kl\left(k - 2\sqrt{kl} + l\right)$$

$$\therefore\ x = \frac{16kl}{6\sqrt{kl}+k+l}$$ …（答式）

力ずくで解いているように最初は感じたが、うまく整理しながら解を得ている。
が試行錯誤の結果かも知れない。

なお、左図のような旁書式は、次のように読むことが出来、その式は下のようになります。

①②⑤⑦より、

$k^2x^2 - 4k^2mx - 6kmx^2 + 4k^2m^2 - 4km^2x + m^2x^2 = 0$ ‥⑩

これは、$(kx - 2km + mx)^2 = \left(2\sqrt{2}\sqrt{kmx}\right)^2$

$\therefore\ kx - 2km + mx - 2\sqrt{2}\sqrt{kmx} = 0$ （一矩合）‥⑪

④、$BD - CD = BC$ より同様にして、

$m^2x^2 - 4lm^2x - 6lmx^2 - 4l^2mx + 4l^2m^2 + l^2x^2 = 0$ ‥⑫

$\therefore\ -mx + 2lm - lx - 2\sqrt{2}\sqrt{lmx} = 0$ （二矩合）‥⑬

⑪×l＋⑬×m から、$\sqrt{m} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{kl}}{\sqrt{k}-\sqrt{l}}$ … ⑭

また⑪＋⑬から、$\left(\sqrt{k}-\sqrt{l}\right)x - 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{l}\right)m - 2\sqrt{2}\sqrt{m}x = 0$

この式に⑭を代入して答式を得る。

三章の解法より、はるかにすっきりした解法である。
(同じ手法だが$ABCD$の線分の注目の仕方が異なるだけである)

$$\left(\sqrt{k}+\sqrt{l}\right)\left(\sqrt{k}-\sqrt{l}\right)x - 2\left(\sqrt{k}+\sqrt{l}\right)\left(\sqrt{k}-\sqrt{l}\right)m - 2\sqrt{2}\left(\sqrt{k}+\sqrt{l}\right)\sqrt{m}x = 0$$

五章、『算法点竄手引草』の解法

この解法は『算法雑俎解』の解法とほぼ同じですが、余分なこともなくすっきり短く書かれています。また三章で示した答式からさらに変形して次のようにしています。何故ここまで行うのかはわかりません。

$kx+lx+6\sqrt{kl}\,x-16kl=0$ を

16で除して、$\frac{kx}{16l}+\frac{x}{16}+\frac{6\sqrt{k}\,x}{16\sqrt{l}}-k=0$

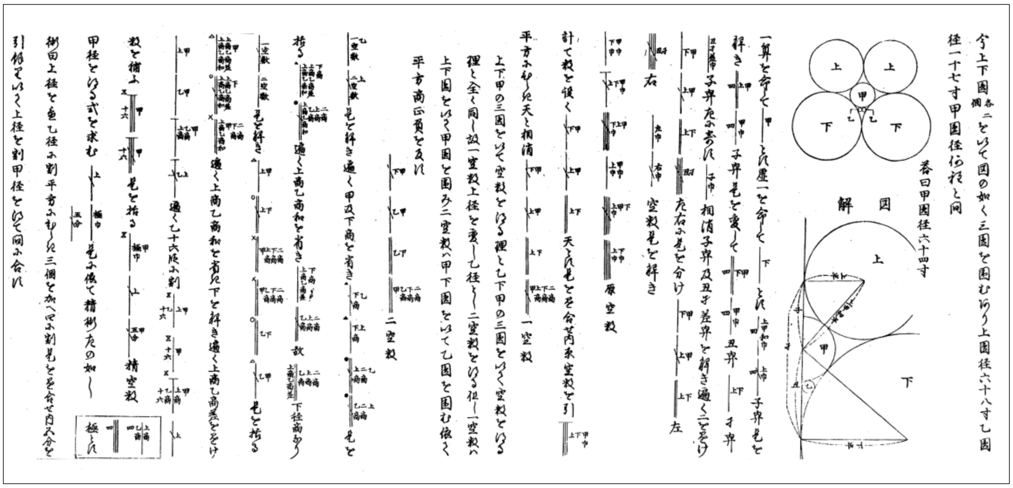
極$=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{l}}+\frac{3}{4}$　として

$$x=\frac{k}{極^2-0.5}=\frac{k}{\left\{\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{k}{l}}+3\right)\right\}^2-0.5}$$

術文はこの最後の式から次のように書かれています。（　）内は筆者追記です。

術曰上径（k）を置乙径（l）に割平方にひらき三個を加へ四に割是を懸合せ内五分（0.5）を引餘里以て上径を割甲径（x）を得て問に合す

時代的には『算法雑俎解』よりこの『算法点竄手引草』の方が37年古く、算額の掲額の文政十三年の三年後ということになります。『算法雑俎解』がこの解法を見たかどうかはわかりません。



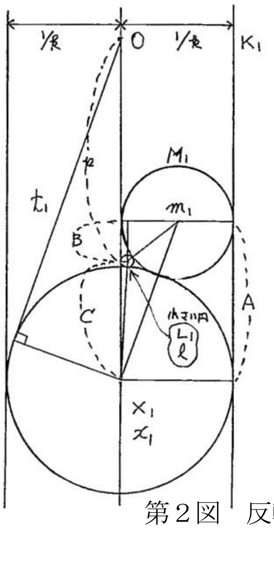
『算法点竄手引草』の原文（東北大）

六章、反転法による解法

反転法は一八三一年にドイツの数学者によって発案されたと言います。任意の点をその点から原点までの距離の逆数に比例する距離に移す、という写像変換の一手法。多くの円や球が外接や内接している問題に向いている。日本では反転法の萌芽と見られる極形術が一八二〇年代には現れ、それを基に反転法とよく似た算変法という手法が法道寺善により一八六〇年までには完成された（以上『反転法と算変法』）。

この反転法で慈光寺の当該問題を『反転法と算変法』には解いている例があるので、それを要約して次に示したい。

天円同士の接点（第1図のA点）を反転中心（原点、O(オー)）とした反転図を第2図に示す。天円は直線K1に、弧円はM1に、人円はX1に、地円はL1に変換される。



第２図　反転図

元図の天＝K(径k)、人＝X(径x)、地＝L(径l)、弧＝M(径m) に対する反転図の記号を、$K_1(k_1)$、$X_1(x_1)$、$L_1(l_1)$、$M_1(m_1)$とする。
反転法公式を利用して、

$$m_1=\frac{1}{k},\quad x_1=\frac{2}{k}\quad \cdots\cdots ①$$

$A=\sqrt{m_1x_1}$, $B=\sqrt{m_1l_1}$, $C=A-B$から計算して、

$$\left(\sqrt{m\ x_1}-\sqrt{m_1l_1}\right)^2=\frac{x_1^2+2x_1l_1}{4}\ \cdots ②$$

①を②に代入して整理すると

$$l_1=\frac{1}{8k}\qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

反転公式から、L_1への接線長をpとすれば、

$$l=\frac{1}{p^2}l_1\qquad \therefore p=\frac{1}{2\sqrt{2kl}}\quad \cdots ④$$

O(オー)とX_1の接線長t_1を求める。

$$OD^2=\left\{p+\left(\sqrt{m_1x_1}-\sqrt{m_1l_1}\right)\right\}^2=t_1^2+\left(\frac{x_1}{2}\right)^2\cdots ⑤$$

⑤に①を代入して

$$t_1^2=\left\{\frac{1}{2\sqrt{2kl}}+\left(\frac{\sqrt{2}}{k}-\frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{k}}\right)\right\}^2-\frac{1}{k^2}$$

$$=\frac{6\sqrt{kl}+k+l}{8k^2l}\quad \cdots ⑥$$

反転公式から

$$x=\frac{1}{t_1^2}x_1=\frac{2}{t_1^2k}=\frac{16kl}{6\sqrt{kl}+k+l}\qquad \cdots(答式)$$

反転図さえ書ければ、後は比較的簡単に求まる手法のようです。

七章、『算法雑俎解義』の解法

この解法は理解できていません。次のようにあります。

以天人假(弧)員求矩合

$$4k^2m^2-4k^2mx-4m^2kx+k^2x^2-6x^2mk+m^2x^2=0\cdots ①$$

求得天径式

$$m^2x^2-\left(4m^2x+6mx^2\right)k+\left(4m^2-4mx+x^2\right)k^2=0\cdots ②$$

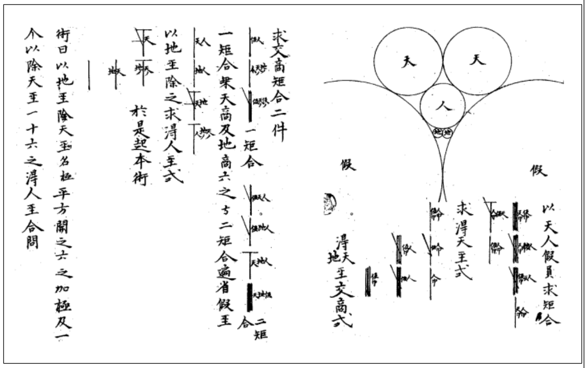
①は四章の⑩に等しい。②は①をkの二次式にまとめたもの。この後「得天地径交商式」とあるからlに関しても同様な式を考えたことが推測される。
この後、突然「交商矩合二件」として

$$mx+\sqrt{kl}\,x-2m\sqrt{kl}=0\quad \cdots ③$$

$$-kmx-lmx+6klx+4klm=0\quad \cdots ④$$

この③④がどうして導かれるのか不明。
確かに③④からは答式が導かれるのだが。

交商矩合とは、「極形術」で用いる用語のようで、②の二次式になにがしかの極数を代入したときを指しているのかも知れませんが、その条件が不明です。このやり方がわかればかなりすっきり解けることになりますが結局課題として残りました。



『算法雑俎解義』の原文（東北大）

八章、おわりに

慈光寺の算額の一問目ということで、少しこだわって幾つかの解法を述べました。これだけを解くにも大分時間を費やしました。それでも三～六章の内容（反転法含む）は原文の解読も含めて理解できたのは幸いでした。残念なのは七章の『算法雑俎解義』の内容が理解できなかったことです。

　ところで掲額者の、行英門人の小川町古寺邑の田中與八郎は、どの様に実際解いたのでしょうか。興味のあることですがその根拠は求むべくもありません。『算法雑俎解』のように解いたのかも知れませんが、行英門人なら意外な高等戦術の可能性も否定できません。

（参考文献）
・大原茂『算額を解く』
・『算法雑俎解』『算法点竄手引草』『算法雑俎解義』
・田部井勝稲・松本登志雄『反転法と算変法』平成26年

編集後記

（割愛です。慈光寺の算額一辺倒になってしまいました）