やまぶき

埼玉北西部の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

日下誠の墓

　前号で日本学士院に行ったことを述べましたが、その帰りに日下誠（明和元年(一七六四)～天保十年(一八三九)）の墓を尋ねようと１㎞ほど離れた谷中の多宝院を訪ねました。しかし、墓地内をいくら探しても見つけることが出来ませんでした。
　捲土重来を期して事前情報を集め、一週間後の八月十九日に再度多宝院を訪ねました。そして今度はすぐに見つけることができました。日下誠の墓は、隣の二基の灯籠(?)に「松源楼」とある大きな墓地にひっそりと背を向けているようでした。
　自然石の板碑の正面に「天保十己亥年六月三日　日下誠先生之墓　行年七十六」とあり、裏面には「祠堂金三両可寄附之處當院住職因所望換半鐘納之」とありました。
　「覚真院観翁照道居士」と文献にはありますが、この墓には刻まれていません。
　日下誠は関流五伝の有名な和算家。通称貞八郎、字は敬祖、号は五瀨。初め鈴木誠政、または矢田喜惣太と言い、後に日下貞八郎と改む。若い頃から安島直円の門に入り、皆伝を得、麻布日下窪で塾を開く。その門からは和田寧・内田五観・長谷川寛・大原利明・白石長忠・五瀬是勝(第17号参照)等和算の錚々たる人物が出ています。
　三上義夫によれば誠は料亭松源より出た人であるという。ネットで見ると上野広小路に割烹店松源があり、勝海舟の『氷川清話』の中にも出てくるという。墓の位置からして強(あながち)無関係とは思われません。

第28号　平成二七年(二〇一五)九月二六日
発行部数　十五部　（不定期刊行）
発行者　東京都羽村市　山口　正義

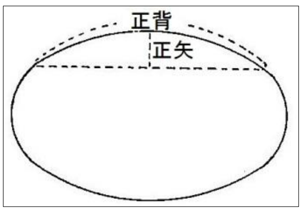
日下誠の墓

楕円の周長のこと

一、はじめに

　第９号で『古今算鑑』を紹介しましたが、その中で著者の内田五観が文政三年、十五歳の時に武州一之宮氷川神社（大宮）に七問の算額を奉納していることを述べました。
　今、その一問目の術文の解読に苦労しています。その問題は次のようなものです。

　今有如図楕円長径一十五寸
　短径一十二寸正通矢一寸二分
　問正背幾何
　答曰正背九寸四二七一
　六七七有奇

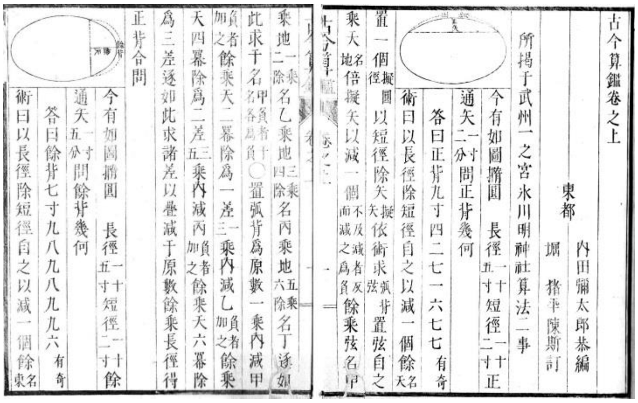


　題意は単純ですが、術文の解読が難しい。元々楕円の周長を求めるには「楕円積分（第二種）」を行うというのが昔の学習でした。内田五観(弥十郎)は早熟だったと言われますが十五歳の内田五観はどのように解いたのか気にかかります。
　因みにネットの計算サイトを利用して計算してみると内田が出した答は全桁正しいようです。但し、サイトには矢から直接正背を求めるようなものは無かったので、類似の計算から少し変換して求めました。
　ここでは和算は楕円をどのように扱った

のか少し調査した結果を述べたい。

二、楕円の一周長

楕円は江戸初期には「飯櫃(いいびつ)」とか「平卵形」と言われていた。但し、これは長方形の左右に半円を付けた場合を指しているようなので正しくはない。尤も、万葉集には「長さ一尺一寸、囲み一尺八寸、重さ十六斤十両、並(とも)に皆楕円(まろ)く、状(かたち)鶏子(とりのこ)のごとし」との既述があるとか。関孝和が「側円」を使用してからは、幕末になってもこの言葉が使われました。楕円は中国の「暦算全書」から来た言葉だといいます(中根元圭が訳したのは享保十八年)。


古今算鑑巻之上
内田彌太郎恭編
東都 堀 指平陳斯訂
所掲于武州一之宮氷川明神社算法二事
今有如圖擴圓 長徑一十五寸 短徑一十二寸 正
通矢一寸二分 問正背幾何
答曰正背九寸四二七一六七七 有奇
術曰以長徑除短徑自之以減一個餘名天
置一個擬圓徑以短徑除矢擬矢依術求弧背 置弦自之
乗天名地倍擬矢以減一個不及減者反減之爲負 餘乗弦名甲
乗地二除一乗名乙乗地四除三乗名丙乗地六除五乗名丁逐如
此求千名 甲負者千名各爲負 ○置弧背爲原數一乗內減甲
負者加之 餘乗天二冪除爲一差 三乗內減乙 負者加之 餘乗
天四冪除爲二差 五乗內減丙 負者加之 餘乗天六冪除
爲三差逐如此求諸差以疊減于原數餘乗長徑得
正背合問
今有如圖擴圓 長徑一十五寸 短徑一十二寸 餘
通矢一寸五分 問餘背幾何
答曰餘背七寸九八八九九九六 有奇
術曰以長徑除短徑自之以減一個餘名東

『古今算鑑』の１問目と２問目(野口泰助氏)

さて、楕円の周長を最初に計算したのは磯村吉徳(?~一七一〇)で、『算法闕疑抄』の中で円錐台の斜截面(楕円)の周を出題し、解法を『頭書算法闕疑抄』(一六八四)に示しました。が、解法は図形的に解いていますが明らかに正しくありませんでした。

関孝和(一六四〇頃~一七〇八)は『解見題之法』の中で円柱の斜截面(楕円)から①式を導きましたが、これは近似式でした。

会田安明(一七四七~一八一七)は『算法側円集』で長径を等分した点を通り、短径に平行な弦を引き、楕円との交点を結んでできる内接多角形の周を求める方法で、最大128等分した場合を求めています(②式)。但し、長径５寸、短径３寸の場合のみで、一般解はありません。

楕円の周長を正確に求めたのは、石黒信由(一七六〇~一八三六)と坂部広胖(一七

$a=$長径、$b=$短径。具体数字は $a=5, b=3$ の場合で正しい値は、$L=12.763499431699064\cdots$

①関孝和の式　　文献(1)より

$$L=\sqrt{\pi^2 ab+4(a-b)^2}=12.80796885\cdots$$

②会田安明の求めた値　　文献(1)より

４等分　$L=12.2808559$

64等分　$L=12.750396656$

128等分　$L=12.759165985639652408652972$

③坂部広胖の式　　文献(2)より

$$L=2a\left\{1+\frac{2}{3}A+\frac{2}{5}A(1-A)+\frac{2}{7}A\left(1-2A+2A^2\right)\right.$$
$$+\frac{2}{9}A\left(1-3A+3\cdot 2A^2-3\cdot 2\cdot 1A^3\right)$$
$$+\frac{2}{11}A\left(1-4A+4\cdot 3A^2-4\cdot 3\cdot 2A^3+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1A^4\right)$$
$$\left.+\frac{2}{13}A\left(1-5A+5\cdot 4A^2-5\cdot 4\cdot 3A^3+5\cdot 4\cdot 3\cdot 2A^4-5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1A^5\right)\cdots\right\}$$

$=11.50901579\cdots$ (7項まで、収束悪し)　　但し、$A=\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$

なお、「創製側圓術」では、$L=12.76349953\cdots$を出している。

④和田寧の式、及び算法求積通考の問題５　　文献(2)他

$$L=a\pi\left(1-\frac{1}{2^2}r-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}r^2-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}r^3-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}r^4-\cdots\right)$$
$$=a\pi\left(1-\frac{1}{2^2}r-\frac{1\cdot 3}{8^2}r^2-\frac{3\cdot 15}{48^2}r^3-\frac{15\cdot 105}{384^2}r^4-\cdots\right)$$

$=12.77317326\cdots$　　但し、$r=1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$ で、$\sqrt{r}$ は離心率

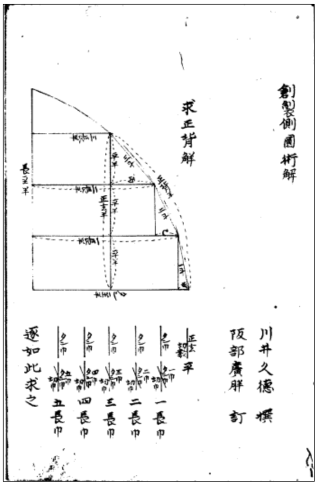
⑤第２種完全楕円積分（以下のaは長径の半分、bは短径の半分）

楕円 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ において $e^2=r=1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$ のとき次式となる。

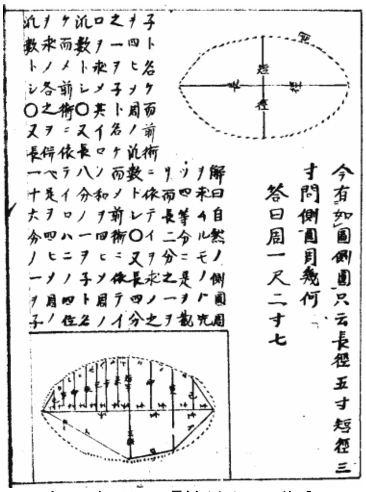
$$L=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,d\theta=2a\pi\left[1-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right\}^2\frac{e^{2k}}{2k-1}\right]$$

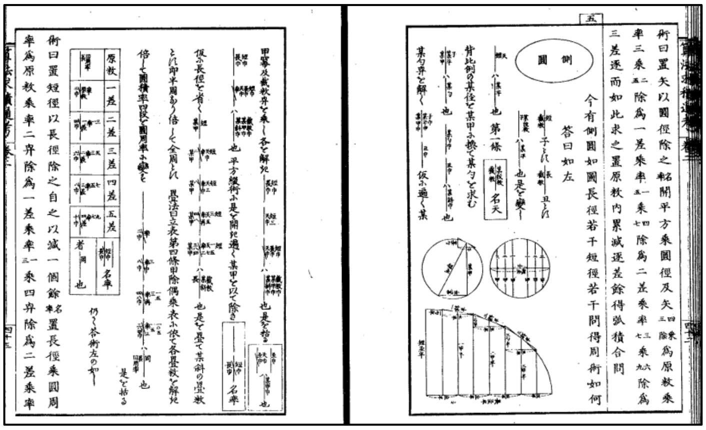
これは④に等しい。

五九～一八二四)で、ほぼ同じ考えで、ほぼ同時期（石黒の方が少し早い）でした。
石黒は『側円周背眞術』(一八〇七年、写本)で初めて側円の正背・余背・側円周を出しています。(正背は長径に平行な弦に対する背、余背は短径に平行な弦に対する背をいいます)
坂部は『算法点竄指南録』(一八一〇年、刊本)で公式のみ述べ、その後『創製側円術解』『側円周解』で詳細に述べています。③式に坂部広胖の式を示しますが、これは余背・正背を求める式の特別の場合として求めたものです。実際には余背を導く過程が詳細にあります(筆者は未理解)。計算した結果ではこの式は収束が悪いようです。
和田寧(一七八七～一八四〇)は円理を完成させた幕末最高の和算家として有名ですが、和田が『円理順逆小成』で求めた楕円周の式を④に示します。この式の導き方は『算法求積通考』の問題５にもあり、短径を直径とする円をｘ軸方向にａ／ｂ倍したものが楕円と考えています。被積分関数を級数展開してから積分しています。結果は積分区間が〔０からａ／２〕の第二種完全楕円積分（⑤式）に等しい。
なお、和算家は積分区間を〔０から１〕の間で行うのが通常だから基本的には式⑥のようになります。



坂部広胖の『創製側円術解』（東北大）


会田安明の『算法側円集』（東北大）


『算法求積通考」の問題５　（筆者蔵）

三、楕円の正背・余背

既述のように、坂部広胖は楕円に関して最初に余背や正背を求めています。その式は⑦のようなものです。併せて『古今算鑑』の一問目と二問目に適用した場合も示します。やはり収束が悪いようです。
また、⑥からですと積分区間を変更すれば良いことになりますが解き方は難しくなりそうです（昔の本で格闘中です）。
それにしても坂部の③式と、④や⑤が等しいのはどうしてなのか？

四、内田五観の術文

解読が難しい場合は、数学的に解いてみて、その式から読みを類推することがあります。しかし、ここまで述べた式からは類推することは難しく解読できていません。

因みに『古今算鑑』の一問目の術文は次のようなものです。『埼玉の算額』にも所収されています。

術曰以長径除短径自之以減一個餘名天置一個擬圓径以短径除矢擬矢依術求弧背弦置弦自之乗天名地倍擬矢以減一個不及減者反而減之為負餘乗弦名甲乗地一乗二除名乙乗地三乗四除名丙乗地五乗六除名丁逐如此求干名甲負者干名各為負○置弧背為原数一乗内減甲負者加之餘乗天二冪除為一差三一乗内減乙負者加之餘乗天四冪除為二差五三乗内減丙負者加之餘乗天六冪除為三差逐如此求諸差以畳減干原数餘乗長径得正背合問

この術文の解読にはまだ時間を要しそうです。

参考文献

（１）佐藤健一監修『和算の事典』朝倉書店

（２）学士院編『明治前日本数学史 第４巻』

（３）深川他『日本の数学何題解けますか？上』

（４）坂部広胖『創製側円術』、他

⑥積分区間の変換（和算家の例）　文献(3)より

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の周の積分は次のようになる。a,b は長半径、短半径。

$$L=2\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2\left(a^2-x^2\right)}}\,dx=4a\int_0^1\sqrt{\frac{1-rt^2}{1-t^2}}\,dt$$

$$=4a\int_0^1\left\{1-\frac{1}{2}rt^2-\frac{1}{8}r^2t^4-\frac{3}{48}r^3t^6-\frac{15}{384}r^4t^8-\cdots\right\}\times\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

ここで、$x=at,\ r=1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$ である。$\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\left[\sin^{-1}t\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$

この式を漸化式で表すと次のようになる（一部未確認）。

$$L_0=2a\pi\ ,\ L_1=\frac{1}{2^2}rL_0\ ,\ L_2=\left(\frac{1\cdot3}{4^2}\right)rL_1\ ,\ L_3=\left(\frac{3\cdot5}{6^2}\right)rL_2\ ,\ L_4=\left(\frac{5\cdot7}{8^2}\right)rL_3\ ,\cdots$$

であり、$L=L_0-L_1-L_2-L_3-L_4-\cdots$　となり④に等しい。

⑦坂部広胖の余背の式　文献(2)より

長径 a、短径 b の楕円の短径に平行な弦（余弦）を c とするとき、

$\left(\dfrac{a}{2b}\right)^2=$ 天 $=A$、$\left(\dfrac{c}{b}\right)^2=$ 人 $=B$ とすれば、

$$\text{余背}=c\times\left\{1+\frac{2}{3}AB+\frac{2}{5}AB^2(1-A)+\frac{2}{7}AB^3\left(1-2A+2A^2\right)\right.$$
$$+\frac{2}{9}AB^4\left(1-3A+3\cdot2A^2-3\cdot2\cdot1A^3\right)$$
$$+\frac{2}{11}AB^5\left(1-4A+4\cdot3A^2-4\cdot3\cdot2A^3+4\cdot3\cdot2\cdot1A^4\right)$$
$$\left.+\frac{2}{13}AB^6\left(1-5A+5\cdot4A^2-5\cdot4\cdot3A^3+5\cdot4\cdot3\cdot2A^4-5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1A^5\right)\cdot\cdot\right\}$$
$$=7.988980797\cdots\quad\left[\text{古今算鑑２問目}\ a=15,b=12,\text{矢}\ h=1.5\ \text{で}\ c=7.2\right]$$

（古今算鑑の値は7.9898996…）

正弦を与えて正背を求める場合は、上式で a,b を入れ替え、c を正弦にして求める。

古今算鑑１問目は $a=15,\ b=12$ で $h=1.2$ から $c=9$ で計算すると、

正背 $=9.427012064\cdots$（古今算鑑の値は、9.4271677…）となる。

編集後記

内田五観の楕円の正背（または余背）の求め方（術文）の解読をしようと思ったのは一年程前。一年経ち再挑戦してみましたがやはり解読出来ませんでした。全く進歩なく愕然としました。他にも解読出来ない問題を抱えています。今後の励みの題材に残しておくのも良いかと割り切るしかありません･･･。（強弁です）

九月に70歳になりました。「北武蔵の和算家」の調査目標期限でしたが今少しかかりそうです。私事ですが長男と孫二人の四人で奥秩父連峰の金峯山手前の朝日岳(2579 m)に行ってきました。車で大弛峠(おおだるみとうげ、2360 m)まで行けるので楽でした。好天にも恵まれ 2500 m級の素晴らしい山並みを堪能できました。写真は朝日岳から金峯山を望む。