やまぶき

埼玉北西部の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

第24号　平成二七年(二〇一五)五月二五日
発行部数　十五部　(不定期刊行)
発行者　東京都羽村市　山口　正義

飯能出身の千葉歳胤の円周率（二）

六、天文大成真遍三條図解の円周率

歳胤は『天文大成真遍三條図解』の中で天径を求めるためだろうか周率（円周率）について述べ、ある漸化式で小数点以下十三桁まで求めています。それは十桁まで正しく、十一桁目も四捨五入した値となっています。ここでは歳胤が求めた円周率について述べます。

　原文では、はじめに「藤原親盈先生門人平歳胤考著」とあり、続けてすぐに乗率と除率の次のような数表となり、これが四十乗まであります。

	乗率	除率		乗率	除率
廉	四	一十二	九乗	三百二十四	三百八十
隅	一十六	三十○	一十乗	四百○○	四百六十二
三乗	三十六	五十六	一十一乗	四百八十四	五百五十二
四乗	六十四	九十○	一十二乗	五百七十六	六百五十○
五乗	一百○○	一百三十二	一十三乗	六百七十六	七百五十六
六乗	一百四十四	一百八十二	一十四乗	七百八十四	八百七十○
七乗	一百九十六	二百四十○	一十五乗	九百○○	九百九十二
八乗	二百五十六	三百○六	一十六乗	一千○二十四	一千一百二十二

続いて次のような周率の記述があります（適当に見て下さい）。

求ム二円径率及ヒ周率ヲ一
以テ二径一十寸ヲ一更ニ為ス二径率ト一
以テ二円半径五寸ヲ一為ス二弧矢ト一
列二円径ヲ一以テ二弧矢ヲ一乗レ之得ル数ヲ四因メ之ヲ
為ス二元数ト一乃方式数
列二元数ヲ一以テ二弧矢ヲ一乗レ之以テ二円径ヲ一除キレ
之ヲ以テ二廉乗率ヲ一乗シレ之ヲ
如ク二廉除率ノ一而モ
一ニメ得二廉成数ヲ一寸下得テ二十二位ヲ一止
列二廉成数一以二弧矢一乗レ之以二円径一除レ之以
二隅乗率一乗レ之如ク二隅除率一
而モ一ニメ得二隅成数一寸下得テ二十二位ヲ一止
列二隅成数一以二弧矢一乗レ之以二円径一除レ之以
二三乗ノ乗率一乗レ之如ク二三乗ノ
除率一而モ一ニメ得二三乗成数一寸下如レ上此ノ以下ハ
皆ナ倣ヘレ之レニ
列二三乗成数一以二弧矢一乗レ之以二円径一除レ之
以二四乗ノ乗率一乗レ之如ク二四
乗除率一而モ一ニメ得二四乗成数一下皆ナ如ク二前術ノ
一而メ到二四十乗ニ一止
如メ二前術ノ一而メ所レ得ル之成数如シレ左ノ

方　元数二百寸○○○○○○○○○○
廉　卅三寸三三三三三三三三三三三三
隅　八寸八八八八八八八八八八八八
三乗　二寸八五七一四二八五七一四二
四乗　一寸○一五八七三○一五七八二
五乗　○寸三八四八○三八四八○○
六乗　○寸一五二二二八七二三六五七

（この間省略）

卅九乗　○寸○○○○○○○○○○○一
四十乗　○寸○○○○○○○○○○○○

共ニ四十位相併テ得数列スレ左ニ
二百四十六寸七四○一一○○二七四九四
相併ルノ数即チ為ス二半円周巾ト一故ニ平方ニ開キレ
之ヲ得ル数乃チ?半円周也
倍メレ之ヲ為ス二
周率ト一如シレ左ノ求ルレ径ヲ者ハ相併テ為シレ実ト以テ二半
周巾ヲ一為シレ法ト実如クレ法ノ而モ一ニメ得テ二円径一十寸ヲ
一即チ径率也
周率三十一寸四一五九二六五三五九一四
欲ルレ合二寸下立位ニ一故ニ求二寸下十二位ニ一止假
令ヘハ如ク二前術ノ一而メ欲ルレ合二寸
下十位ヲ一者ハ求テ二寸下二十位ヲ一止ミ欲ルレ合二寸
下五十位ニ一者ハ求テ二寸下百
位ヲ一止ミ欲ルレ合二寸下百位ヲ一者ハ求二寸下二百位
一欲レ合二寸下三百位ヲ一者ハ
求二寸下六百位也以下皆倣ヘレ之レニ

以上の文章をもとに具体的に計算すると小数点以下十二桁までの演算で次のようになります。

①方 10×5×4(四因)＝200 →これが元数

②廉 (200×5÷10) ×4(廉乗率)÷12(廉除率)＝33. 333333333333

③隅 (33. 333333333333×5÷10) ×16(隅乗率)÷30(隅除率)＝8. 888888888888

④三乗 (8. 888888888888×5÷10) ×36(三乗乗率)÷56(三乗除率)＝2. 857142857142

以下同様に四十乗まで行う。

⑤四十乗まで求めた値を全て加算すると、246. 740110027494

原文の値を合計するとこの値になりません。十五乗の0寸 000058179953 を 0寸 000085179953、二十一乗の 0寸 000000833717 を 0寸 000000823717 とすると合います。原文の誤写と思われます。

⑥2√「246. 740110027494＝31. 415926535914

⑦この値を10分の1にして「3. 14159 26535 914」の円周率を得る。

この値は小数点以下十桁まで正しいです。なお、原文の計算値は小数点以下十二、十三桁で若干の誤差があり、これが正しく計算されていれば十二桁まで正しい値が得られていた筈です。これらの計算には多大な労力を要するのは容易に想像できることです。

また、この求め方をまとめると式１のような漸化式となります。

なお筆者は、「寸下五十位に合せ欲する者、寸下百位を求めて止め・・・」などをヒントにしてこの式を使い精度を上げて計算し、因みに小数点以下千桁まで求めてみましたが、全く正しい値が得られました。これは後に述べるようにこの式が公式そのものになるものだから当然の帰結でもあります。

$$周率 = 2\sqrt{a_0 + \sum_{n=1}^{40} \frac{a_{n-1} \times 5 \times (2n)^2}{10 \times b_n}}$$

但し、

$a_0 = 10 \times 5 \times 4 = 200$、　$a_n = \dfrac{a_{n-1} \times 5 \times (2n)^2}{10 \times b_n}$

$b_0 = 2$、　$b_n = b_{n-1} + 10 + 8(n-1) = b_{n-1} + 8n + 2$

なお、

$(2n)^2$は、$n=1$のとき4で廉乗率、

$n=2$のとき16で隅乗率、

$n \geq 3$のときはn乗乗率といい、

b_nは、$n=1$のとき12で廉除率、

$n=2$のとき30で隅除率、

$n \geq 3$のときはn乗除率といっている。

また、5は円半径(弧矢)、10は径率であり、

円周率＝$\dfrac{周率}{径率}$だから、上記周率の１０分の１が円周率となる。

式１　歳胤が計算した式

さて、式１はどのようにして導かれたのだろうか。結論から言えば歳胤自身が考えたのではなく、建部賢弘が導いた式であるようです。建部賢弘は『綴術算経』の「探弧数第十二」の中で式２に示すような弧背の式を帰納的に算出しています（ここでは帰納的に求めたというのがミソであろう）。

この式はさらに無限級数に展開され、著名な数学者オイラー（一七〇七~八三）の無限級数の式より時代的に先行して求められたものとして有名になりますが、式２の形からはオイラーの展開式はすぐにはなかなか結びつきません。『綴術算経』の後に刊行された賢弘の『円理弧背術』では式３のように表されることになり、その値は表１の値そのものです。つまり式１の漸化式は式３の係数を用い、式２で $d=10$, $c=5$ とし、$2s$ として一気に円周を求めるために√「（ルート）の中に「４」という因子を導入したものと思われます。建部賢弘―中根元圭―幸田親盈―今井兼庭・千葉歳胤といった流れの中で歳胤はこの式を勉強し、このように応用したのではないかと思います。ただ疑問なのは賢弘が『綴術算経』の中ですでに四十桁以

綴術算経の探弧数第十二における弧背sの算出式

(dは直径、cは矢)

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 元数＋一差＋二差＋三差＋\cdots$$

$元数 = cd$　、$一差 = (元数) \times \dfrac{1}{1\cdot 3}\dfrac{c}{d}$

$二差 = (一差) \times \dfrac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}\dfrac{c}{d}$　、$三差 = (二差) \times \dfrac{3^2}{2\cdot 7}\dfrac{c}{d}$

$四差 = (三差) \times \dfrac{2\cdot 4^2}{5\cdot 9}\dfrac{c}{d}$　、$五差 = (四差) \times \dfrac{5^2}{3\cdot 11}\dfrac{c}{d}$

$六差 = (五差) \times \dfrac{2\cdot 6^2}{7\cdot 13}\dfrac{c}{d}$　、$七差 = (六差) \times \dfrac{7^2}{4\cdot 15}\dfrac{c}{d}$

……

式２　綴術算経の弧背の式

式２の係数

$$\frac{1}{1\cdot 3}, \frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}, \frac{3^2}{2\cdot 7}, \frac{2\cdot 4^2}{5\cdot 9}, \frac{5^2}{3\cdot 11}, \frac{2\cdot 6^2}{7\cdot 13}, \frac{7^2}{4\cdot 15}$$

は、偶項の分母子に2を乗じ、奇項のそれに2^2を乗ずると

$$\frac{2^2}{3\cdot 4}, \frac{4^2}{5\cdot 6}, \frac{6^2}{7\cdot 8}, \frac{8^2}{9\cdot 10}, \frac{10^2}{11\cdot 12}, \frac{12^2}{13\cdot 14}, \frac{14^2}{15\cdot 16}$$

となって一律に書ける。

式３　係数の変形

上の円周率を求めているのに、敢えてもっともらしく十三桁まで求めているのは理解に苦しむところでもあります。歳胤は実用性を重視し、天径を求めるにはそれ以上の精度は不要とでも考えたのでしょうか。

　なお、二十六年後の天明四年(一七八四)に、歳胤の門人でもある経世家の本多利明が『再訂三條図解』の冒頭で歳胤と全く同じ手法で四十八桁まで正しい値を求めています。

七、蝕算活法率

　歳胤の代表的著作である『蝕算活法率』百八十五巻は明和三年(一七六六)の作です。この書は本文の最初に活法暦とあることから『蝕算活法暦』、あるいは単に『活法暦』といわれることもあります。

　『増修日本数学史』には、「蝕算活法率百八十五巻、交蝕の算法具われり。或る人曰く、渋川図書の為めに作れりと。これ或は然からん」とあり、この文章に対して三上義夫は「蝕算活法率の序を見るに、天文方渋川図書の為めに作れること明かなり」と注書きしています。渋川図書光洪が修正宝暦暦(ほうりゃくれき)作成に携わっていたときに歳胤が光洪のために作成したといわれる根拠となるものです。

　東大総合図書館にある『蝕算活法率』は明治の写しで(明治廿九年十二月十一日の受入印あり)、首巻および蝕算活法率一から二十までの二十一冊から成り、各冊九十～百頁、計約二千頁の大著です。首巻には三つの序文と歳胤の自序があります。首巻の活法暦から終盤までは暦経(天文学的内容で各種天文定数の導き方などの説明)であり、その後から蝕算活法率二十の百八十四巻までは全て立成(数表)で、最後には門人四人による跋があります。そして最終頁に遠藤利貞の後序(明治三十一年)があります。後序では光洪らが歳胤に密かに作らせ公にしなかったことが述べられています。『蝕算活法率』の全体の構成は次のようになっています。

首巻

　蝕算活法率序(明和丙戌年((明和三年一七六六))十一月丁卯　武江散人小倉永世無隣)

　蝕算活法率序(明和丙戌年十一月丁卯渋川源光洪)

　蝕算活法率序(明和三年歳次丙戌冬十一月丁卯日　藤盈子親脩序)

　蝕算活法率引(明和三年歳次丙戌十一月丁卯日本江都散士千葉陽生平歳胤自引)

　活法暦(暦経)(明和五年歳次戊子爲元)

　立成(時差率、北極出地(筆者注:北緯)高低損益率、北極出地高低各國定率…

蝕算活法率一(巻一～巻九)

蝕算活法率二(巻一十～巻一十八)

蝕算活法率三(巻一十九～巻二十七)

蝕算活法率四(巻二十八～巻三十六)

：

蝕算活法率二十(巻一百七十五～巻一百八十四)

　跋(明和三年丙戌冬十一月丁卯　門人四人)

　遠藤利貞の後序(明治三十一年)

ここでは歳胤の自序を次に示したい。

蝕算活法率引

授時暦儀曰暦法疎密験在交食也然則非交食何以得験焉哉従古歴今倭漢不得其正如何北極有高低日躔有遠近而生南北差有午前午後而生東西差及時差黄道出入赤道而有直有斜日月異躔離故有見於地心與見於地皮之差而生黄白二交進退之差也元郭守敬立相減相乗及自相乗之法而以求之又以所當午中赤道陰暦限陽暦限不論赤道以南以北午前午後之食故雖以親未全密于天也後世不改之而爲然而無不依此法矣守敬絶倫才而尚未盡焉予謂夫交食者為驗暦也故欲知其正委思有年而漸雖有得一術繁多而不易布筭故竇暦壬午春取其一二以著一葉儀術明和甲申之初夏門人篠山光官石河貞義竹田近江清一太田衣脩吉原六郎義胤佐々木

元隆秀俊佐治傳兵衛庸貞鈴木與兵衛
布道小坂雄税今井兼庭兼庭者予同門也無雙算士
相倶來謂予曰強起作密率固辞不許倶
筭考而丙戌冬終成全部一百八十五巻
號蝕筭活法率用此以測量而推歩則殆
無毫髪之差云爾明和三年歳次丙戌
十一月丁卯日本江都散士千葉陽生平
歳胤自引

主な読み下し文

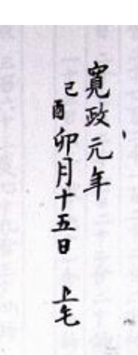
授時暦の儀曰く、暦法の疎密は交食の在るを驗(ため)すなり。然れども即ち交食のあらざるを、何を以って驗(ため)すを得んや、焉(いずく)んぞ古暦に従い今和漢其の正しかるを得ざるかな。北極は高低有り日躔(にってん)は遠近有り、すなわち南北差の生じるは午前午後に有り、東西差及び時差の生じるは、黄道の出入りと赤道(に有り)。直有り斜有り日月は躔離(てんり)異なる地心に於(おい)て見る故に、地皮の差を見るを與(あたえ)る。すなわち黄(道)白(道)の二交は進退の差を生じるなり。…略…　故に宝暦壬午(一七六二年)春、その一二を取って以って一葉儀術を著す。明和甲申(一七六四年)の初夏、門人篠山光官、石河貞義、竹田近江清一、太田衣佾、吉原六郎義胤、佐々木元隆秀俊、佐治伝兵衛庸貞、鈴木与兵衛布道、小坂雄税、今井兼庭（兼庭は予の同門、無双の算士也）相い具して来たりて謂う、予曰く、強いて起(た)ちて密かに率を作る。固辞(こすい)（かたくなに辞したが）し、許されず、倶(とも)に算を考え、丙戌の冬、全部百八十五巻号の蝕算活法率（此れを用い、以って測量推歩、すなわち殆んど豪髪の差無くと云(い)うのみ。）を成して終わる。日(?)明和三年の歳次(時)丙戌十一月丁卯、日本江都散士千葉陽生平歳胤自引

歳胤のこの自序には、『一葉儀術』という書物の経緯も述べられていますが、重要なのは「強いて起ちて密かに率を作る。固辞し、許されず、倶に算を考え、丙戌の冬、全部百八十五巻号の蝕算活法率を成して終わる」という部分です。あたかも強要され秘密裏に作ったということでしょうか。強要の程度やニュアンスはわかりませんが、この部分をもって光洪が修正宝暦暦作成に携わっていたときに、歳胤が光洪のために『蝕算活法率』を作成したといわれるようになった、その根拠の個所と思われます。

八、重栄か栄重か

ところで、この本を書いているときに、伊能忠敬記念館にある歳胤の『蝕算活法暦』に、「寛政元年己酉卯月十五日　上毛　重栄写之」とあることに気が付きました。

執筆当時は、上毛の算学の祖と言われる小野栄重（1763~1831）かなと思った時期も



ありました。仮に栄重とすれば26歳のときで、伊能忠敬記念館にあるのも忠敬の第４次測量に従った経緯などを考えると辻褄が合うように思えます。しかし若いとき重栄と称し、その後逆にして栄重と称するようなことがあり得るのかは疑問があり、やはり重栄の正体は不明とした経緯があります。執筆後も気になってることの一つであり、若干の調査を継続していますが、未だもって重栄がどのような人物か不明です。

参考文献
(1)山口『天文大先生　千葉歳胤のこと』まつやま書房
(2)山口「千葉歳胤と児玉空々」(『あゆみ』36号)

〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜〜

編集後記

23号、24号は図らずも千葉歳胤一色になってしまいました。少し長くなりましたが歳胤についてはまだ一部の内容です。

拙著の本の在庫がありますので、興味のある方がいらっしゃいましたら、差し上げますので連絡下さい。