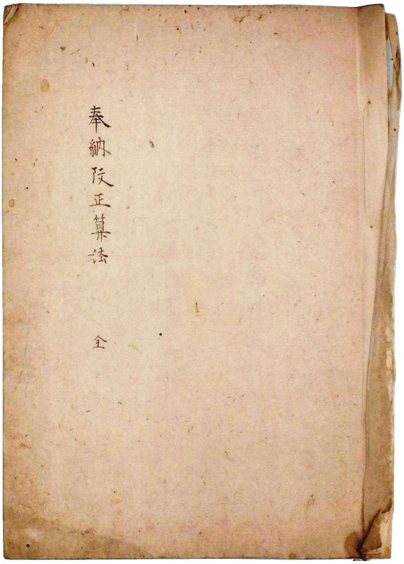
飯能の和算家・石井弥四郎和儀

〜〜一地方の算者の事績〜〜

山口正義



奉納改正算法の表紙

石井和儀の墓（左側面）
「文化元甲子十一月七日生」
「明治四年二月二十一日亡」
とある

石井和儀の墓（正面）
（飯能市原市場）

飯能の和算家・石井弥四郎和儀　目次

飯能の和算家・石井弥四郎和儀　〜〜一地方の算者の事績〜〜

【要旨】

江戸末期の飯能の和算家・石井和儀のことは、一般には勿論、和算の研究者の間でもほとんど知られていない。石井和儀を知る史料は、子(ね)の権現（天龍寺）に掲額したであろう算額の内容が「算法雑俎」という書物に記載されているのが唯一で、生没年さえ不明であった。

この度、筆者は子孫の方に会うことができ、石井和儀が遺したかなりの和算史料を発見することができた。さらに墓石も確認でき、墓石からは生没年も特定できた。

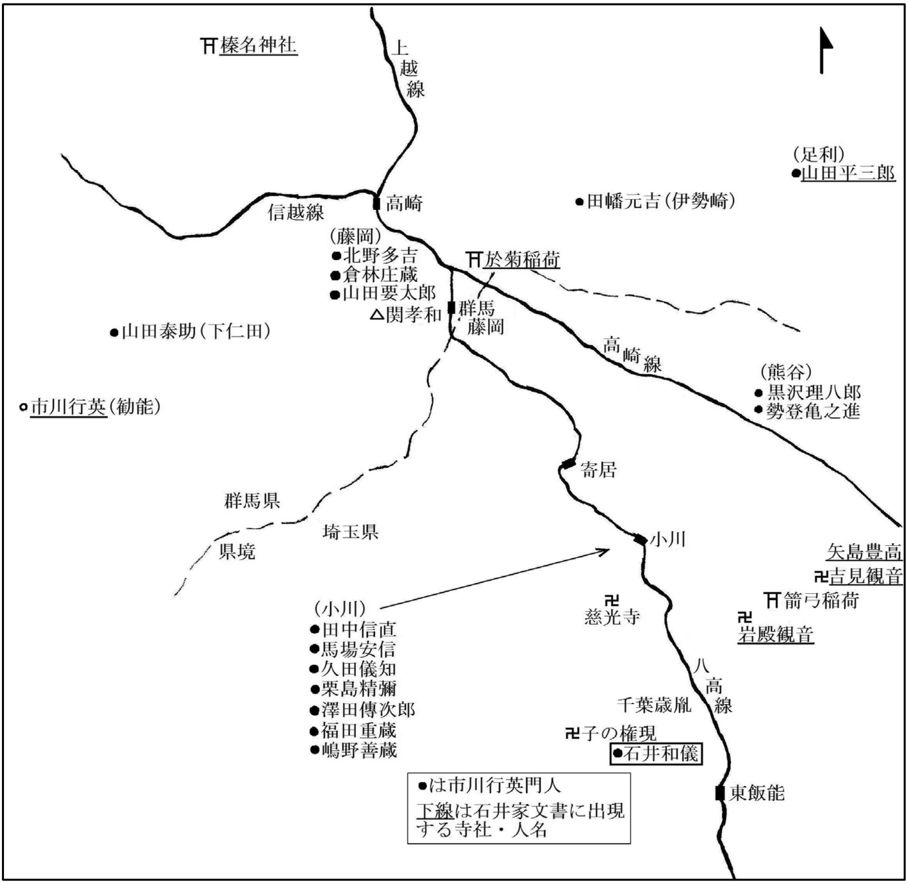
発見した史料の中には、東松山市の岩殿観音にかつて掲額されていた「幻の算額」を写し取っている「奉納改正算法」と題する書物もあり、その算額の内容と独自の解き方を確認することができた。また史料の中には群馬県の榛名神社や於菊稲荷社の算額の記述もあり、これらは現地で写し取っていた可能性があり石井和儀の足取りの一旦を推測できるものである。さらに史料は、子の権現の算額の積分問題に至る勉強の過程が理解できる内容（円理関係）のものであった。これらの史料は埼玉北西部の和算家の一次史料がほとんど紛失している中にあって、大変貴重なものである。

また、日本学士院所蔵の和算資料の中に、師の市川行英の略伝や石井和儀ら門人が師に提出した起請文の写しのあることがわかった。

本書ではこれらの新事実の内容と、師の市川行英のこと、それに子の権現の算額の問題（円柱を角柱で穿去したときの問題）がどのようなものであったかなどを、当時の問題の解き方も含めて述べることにし、飯能という一地方の和算家（算者）石井和儀の事績を確認することにしたい。

なお、本文で全体を述べ、問題の解法など一部の詳細は付録とした。また貴重な史料のうち改正算法と円理

関係の史料についてはその写しを付録として載せた。さらに関連する内容として比企郡ときがわ町の慈光寺の算額についても付録で述べることにした。



石井和儀の関連地図

一章　はじめに

埼玉県飯能市原市場の石井弥四郎和儀（一八〇四～七一）は江戸末期の和算家であり、「合類算法」[注1]などを著した関流の遊歴和算家・市川行英（一八〇五～五四）の門人であった。石井和儀に関しては、従来、算額を記録した「算法雑俎」[1]（文政十三年）という書物に子の権現（天龍寺：飯能市大字南）に奉納したであろう算額（文政十三年三月）の内容が記載されていることしかわからず、生没年も不明であった。著名な数学史の研究学者で北武蔵の算者をかつて調べた三上義夫[2]（一八七五～一九五〇）も算法雑俎の中の記述しか触れていなかった。三上は昭和八年に天文暦学者・千葉歳胤[3]（一七一三～一七八九）の調査で飯能市虎秀を三回ほど訪れているが、原市場の方面に足を延ばした形跡は見当たらない。

今回筆者は、石井和儀の子孫の方に会うことができ、石井家に伝わる古文書類の中から、和算関係の史料（以下、石井家文書）八種類・計二五〇頁ほどを見つけることができた。さらに原市場の西光寺[注2]（廃寺）に墓石のあることが判明し、墓石からは生没年月日も判明した。

図 1–1.　子の権現（天龍寺）

発見した史料の中には、東松山市の岩殿観音[注3]（正法寺）にかつて掲額されていた「幻の算額」を写し取っているものがあり、その内容と石井和儀の解いた内容を確認することができた。また、比企郡吉見町の吉見観音（安楽寺）の算額も写し取っている。それに群馬県高崎市の榛名神社や於菊稲荷社の算額の記述もあり、これも写し取っている可能性がある。これらの問題を石井和儀は解いていたこともわかり、足取りの一旦を推測で

きるものである。
さらに、発見した史料には極限と積分の概念に通じる円理に関する数式が幾つも記述されているものがある。これらの式は松永良弼や安島直円が求めたものだが、複雑な式を間違いなく記述している。恐らくこのような勉強を経て子の権現の算額の問題を扱ったのではないかと思われる。
また、日本学士院所蔵の和算資料の中に師の市川行英の略伝や門人の石井和儀らが師に提出した神文あるいは起請文の写し（以下、市川行英文書）のあることがわかった。石井和儀の起請文は文政六年十二月のもので、十九歳のときのものであることも判明した。

本書では、これらの新発見の内容を述べるとともに、師の市川行英のこと、それに子の権現の算額の問題がどのようなものであったかなどを述べ、飯能という一地方の和算家（算者）石井和儀が遺した事績を確認することにしたい。

（注１）合類算法は天保七年（一八三六）刊。複雑な図形の求積問題や方陣（１から n^2 までの整数を正方形に並べて縦横対角線の数の合計が全て等しくなるようにしたもの）などを述べたもの。方陣は19方陣が書いてある。
（注２）西光寺（廃寺）は南高麗の長光寺（曹洞宗）末。鎌倉時代の板石塔婆は市文化財。
（注３）岩殿観音内には現在、内田祐五郎が明治十一年に掲額した算額がある。

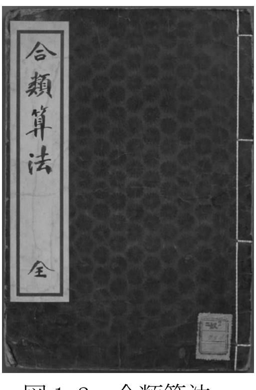


図 1-2．合類算法
（早大図書館）

二章　和算小史

和算とは日本で独自に発達した数学のことだが、本論に入る前にその歴史を俯瞰しておきたい。[4]（ゴシック文字は本書に出て来る用語です）

中国では漢代に「九章算術」（面積や比例・反比例、ピタゴラスの定理など）と呼ばれる数学書が登場した。古代日本では大宝律令・養老律令において、大学寮算道の教科書としてこの九章算術が用いられていた。この時期の日本の数学は中国から多大な影響を受けていたことになる。中世の数学がどのように行われたかはあまり分かっていない。

江戸時代に日本の数学は大いに発展した。毛利重能（しげよし）の「**割算書**」（一六二二年）は日本最初の数学書であった。そこではそろばんが解説されているが、発展のきっかけになったのが吉田光由による「塵劫記」（一六二七年）である。明代の「算法統宗」を服飾したものだが割算書の影響も受けている。塵劫記はベストセラーとなり、初等数学の標準的教科書として江戸時代を通じて用いられている。塵劫記は初歩的な本であったが、巻末に答えを付けない問題（遺題）を載せ、それを解くことにより新たな遺題を出すという**遺題継承**が始まり和算は急速に発達した。

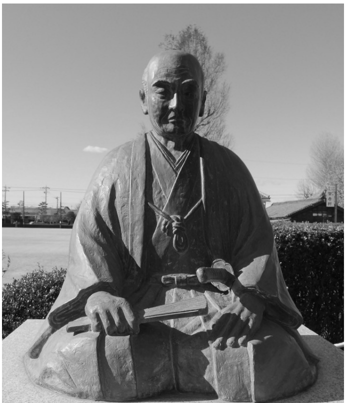


図 2-1. 関孝和碑（群馬県藤岡市）関孝和は藤岡生まれと言われる。（2011 年 12 月）

遺題継承が盛んになるにつれ複雑な問題が出現するようになると、沢村一之の「古今算法記」（一六七一年）は元朝の朱世傑の著「**算学啓蒙**」の中にある天元術を用いて遺題の問題を解き、関孝和や田中由真が相次いで傍書法（文字式による

筆算）の計算法を編み出した。

特に関孝和は天元術・演段法を発展させて点竄術を創始した（いわゆる代数学）。これにより円の算法や複雑な問題が解けるようになった。関孝和は翦管術（剰余方程式問題）、**招差術**（方程式の係数の決定法）、**垜術**（数列問題）、**適尽法**（方程式の最適化）、**円理**（円や曲線の問題）、交式斜乗法（行列式）など多くの分野で新たな発明を行っている。このため関孝和の関流が圧倒的な主流派になっていく。

和算においては円理の問題（円周率や円積率、球の体積などの問題。これらを求めることは数学の本質的な問題であった）が重要な位置を占める。円理は関孝和の登場以降大いに発達し、関は円周率を小数点以下10桁まで正しく求めている。関の弟子の建部賢弘は小数点以下40桁まで正しく求めている。建部はさらに**綴術**（無限級数）を考案し、関孝和の成しえなかった弧背の長さなど円理における各種計算法を導き出した。「綴術算経」では$(\arcsin x)^2$の冪級数展開を世界で初めて計算している。

建部の弟子中根元圭は天文学の洋学の必要性を説いて洋書の輸入禁制を緩めることを八代将軍徳川吉宗に進言した。その結果、西洋の天文暦算を解いた「暦算全書」などの書が伝わり、西洋数学の諸結果がもたらされ、対数や三角法など新たな展開が成された。中根元圭―幸田親盈（八潮市）―**千葉歳胤**（飯能市）の系統は暦学の方で注目される。

関孝和以後は荒木村英がその伝を継ぎ、さらにその弟子**松永良弼**（よしすけ）が「関流」と称えるようになってから他流派を抜いて大いに発達した。松永良弼は関孝和や建部賢弘の研究を発展させ、久留島義

図 2-2. 関孝和墓（藤岡市光徳寺）

この墓は東京新宿の浄輪寺の孝和の墓から御霊を迎え建立したもの。

太の影響を受けながら、**極数術**（極大極小）、**整数術**（ピタゴラス数など整数を作る）、変数術（順列組合せ）などを確立させた。久留島義太は極数術、平方零約術（数の平方根の近似分数を求める方法）、円理や**方陣**の新研究などを行った。

中根・久留島・松永に学んだ山路主住は流派たる関流を樹立し、弟子の教育にも優れていた。その弟子有馬頼徸（よりゆき）は久留米の藩主でありながら数学に優れ、関流の秘密性を嘆き、「拾璣算法」で点竄術や円理の諸公式などそれまで関流の重要秘密であった内容を刊行して世に公表した。同じく山路の弟子**安島直円**（なおのぶ）は今でいう積分法の考えと同じの円の形を長方形の集まりと考え、円あるいは弧背などの曲線の面積を求める方法を導き出した。またその方法を用いて、円柱から球を穿ち去った形の体積を求めるというような問題を初めて解いた。

この時期、遺題継承の風習は廃れてきたが、一方では寺社に数学の問題を載せた額を掲げる**算額**奉納の風習が盛んとなってきた。山路の弟子の**藤田貞資**は教育にすぐれ、良問のみを集めた問題集**「精要算法」**を著した。

江戸後期は最も和算が輝いた時期であった。安島直円の門下では教育に優れた日下誠が出て、その門弟の**和田寧**（やすし）は安島の思想を発展させ、**豁術**（積分法）を創出し、この術のために**円理表**（積分の公式集）を作成し、円理の問題を完成させた。

関孝和の時代では幕臣や侍など身分の高い者が多かったが、江戸後期になると商家や農家など低い身分や地方の人でも高度な数学を嗜（たしな）む者が増えた。それは**遊歴算家**によることも大きかった。日本の各地を歩きまわり、行く先々で数学の教授を行った数学者であり、山口和や剣持章行がいる。また通信教育もよく行われていて、これらは地方に和算を広めることに大きな功績があった。

和算が当時の西洋数学に部分的には匹敵する程に発達した背景には、和算書による「遺題継承」と「算額奉納」の風習とがあったが、和算は明治五年の学制発布で「和算を廃止し、洋算を専ら用ふるべし」としてから急激に衰退していくことになる。それでも部分的には、その後も新たな和算書が出版されたり、算額奉納が続

いたようである。

【和算の性格】

和算の中心的な手法は数値計算的な代数であった。多くの算額に見られるような直角三角形やそれに接する円の図形問題などは、三角形の比例関係とピタゴラスの定理で解ける。ただ複雑な図形や立体図形となると難しい問題も多い。

円理については積分を多く用いて問題を巧みに解いた。一方、微分の概念は和算では発達しなかった。これは和算が関数、あるいは座標の概念を欠いていたことが一つの理由であろう。微分が発達しなかった為、和算では微積分の基本定理がなく、複雑な関数の積分は、冪級数展開と級数の和の公式を利用していた。

三章　石井和儀の伝系と師の市川行英

「算法雑俎」は、関流の算士白石長忠の門人岩井重遠が編集（市川行英訂・白石長忠閲）したもので文政十三年三月の序文があるが、実の著者は白石長忠ともいわれる。群馬・長野・埼玉などの十九社寺・二十二面の算額を記録している。子の権現の算額については、「市川行英門人　武州高麗郡原市場邑　石井弥四郎源和義　文政十三年庚寅三月」とある。子の権現に伺い確認させていただいたが、この算額は現存しない。子の権現は安政五年（一八五八）に大火に見舞われているので、その際焼失したのではないかとのことだった。(注1) 算法雑俎には市川行英の門人としては子の権現の他に、ときがわ町の慈光寺観音堂の算額(5)（現存、但し風化が進み非公開、出題者は田中與八郎信直・馬場與右衛門安信・久田善八良儀知の三名）、東松山市の箭弓稲荷社の算額（非現存、出題者は栗島寅右衛門精彌）、それに上州一之宮貫前神社（群馬県富岡市）の算額（非現存、出題者は山田泰助清房）も記載されている。

　行英・和儀の伝系は図に示すように、関孝和―荒木村英―松永良弼―山路主住

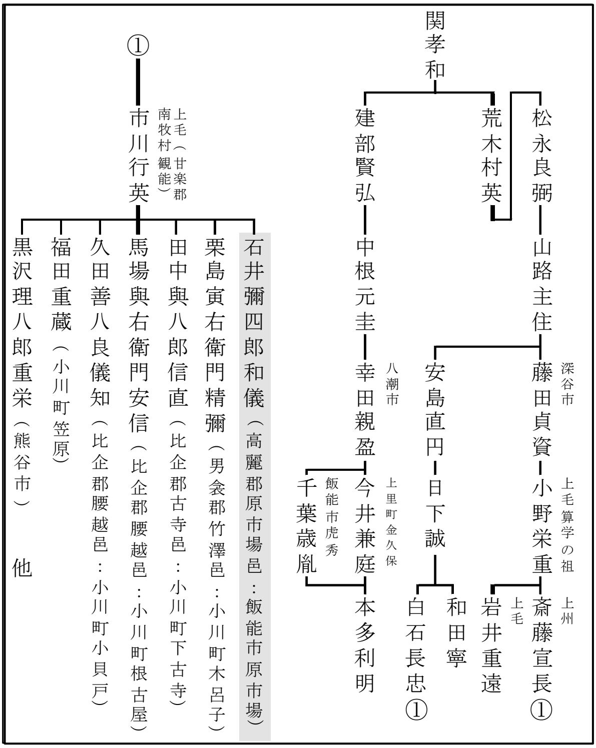


図 3-1. 石井和儀の伝系

―藤田貞資―小野栄重―斎藤宣長―市川行英―石井和儀（行英は白石長忠にも師事しているので、山路主住―安島直円―日下誠―白石長忠―市川行英―石井和儀という言い方もできる）で、まさに関流和算の主流に属していた。

師の市川行英は、「玉五郎と称し、南谷と号す。上毛人なり。初め業を斎藤宣長に受け、後ち白石長忠の門に入り、益々数理の奥を知りぬ。天保七年合類算法を著す[6]」、「上州甘楽郡観能村（現・甘楽郡南牧村勧能）の人、故ありて郷里に居つらくなり、武州あたりに来て教授したと云ふことで、川越侯の知遇を得たと言はれる。此人の門人が武州に散在するのは其為めである[2]」といわれる。また、御三卿一橋家の指南役となり、武蔵川越藩や忍藩の藩士にも教えた。文献（7）には「市川玉五郎氏略傳」（本文前に「飯塚悦太郎氏謄写報告」、奥書に「大正六年一月廿七日　郷土誌中より抜　茂木松次郎殿」とある）として次のようにある。誇張された表現もあるが参考に全文を掲げてみる。

市川玉五郎氏略傳

氏徳川時代に生れ維新以前物故せり、蓋関流算学の大家なり、子孫本村に居住せず記録の傳るものなきにより其正確なる傳を得ずと云へども、日本有名の大家十二人連名して、数学上の発見を額面に記載し東京浅草観音堂に奉納せるもの今尚存せりと云へり、氏学成り諸国を歴遊せんとするとき、先江戸に出で、知人によりて御三家一橋卿に謁し其の術を語る、家老試に天の高さを測らんことを以てせり、答へて曰く難事に非らず□、浪人の身之を施すの器物準備なし、我が希望する設備をなさば其の望を満さんと、卿命じて高台を築き、器物を備へ、之か測量をなさしめたり、天の高さ無窮

或物を目標とし、億万千百何里何町何間何尺何寸に至るまで算出して之を示せり、卿之を賞して優遇し旅銀を与へて還せり、後数年卿曰く彼又来らん、再測量せしめて其の術を試んと命して少しく台を高くせしむ、遊歴三年果して来る、卿はしめて曰、前年の測量必ず正確ならん、然れども歳月数を重ぬれど天地異動なしと謂ふべからず、乞ふ再之を測量せよと、乃、前年の器物を備へ之に従事せしむ、氏驚きて謂へらく、正に三寸の差違あり、之（これ）天地の異動か抑（よく）我が術の誤りか、天地異動せずんば我が術に異る所なし、吾少壮より此の学に志し此の術を信すること深し、若し此の術にして此の如く差異ありとせば、之（これ）此の術の信すべからさるものなり、吾今後此の術を廃せんと、測天終り卿客殿に請じ大に饗膳して其の労を謝す、氏難（嘆）息して距離の測定前後異る所あり、何の異動かに由るか知るべからず、多年研鑽の道終に用ふる所なし、自今（後）此の術を為さずと云へり、卿告ぐるに術を以てし大に其の精妙なるを賞し、命して三斜術指南役となせりとぞ、今遺著数部あり、多くは幾何三角術に属する者なり、氏文化二年大字羽澤勧能に生る、姓源名行英、市川徳兵衛長重の次男、兄徳兵衛金重家を継ぎ、氏は東隣に分家して妻を迎へて一女を設し、女子三歳になり妻を還して娶らず、嘉永七年寅十月二十九日歿せり、行年五十歳、後女子生長して婿喜市を迎へしも喜市二女を遺して早世し家運衰へ維持すべからず親族の勧誘にすりて出で丶信州北佐久郡岩□田篠沢某の家に嫁し二子を生む、長子勇作今東京に在り、母

も亦健在なり、是れ実に市川行英の外孫なり、
行英少うして学を好み、数学は其の最も嗜む所にして関流七傳斉藤四方(吉)藤原宜長を師とし、刻苦研鑽数理の蘊奥を窮（きわ）め其術精微、人をして驚嘆せしめしと云ふ、合類筭法二（?）冊は天保七年秋刊行して世に公にせり、其心（他?）天元演段筭法集、関流神楽筭法、筭法奉納集等草稿のまゝにして散逸し、□収すべからず惜むべきことにこそ
尚餘技として遠州流挿花を学び、文政十一戊子の年二月葛味齋一焼より一號免許章を受けて一観と號し、嘉永四辛亥の年正月葛昌齋一輝より挿花印加皆傳を得、昌楽斎一観の斎号を免許せられたり、其の人となりを思ふべし

多才の人物であったようである。文中、浅草観音堂に十二人連名して（算額を）奉納したとあるが、その事実を記した文献は見つからない（後述のように文政十年に神田明神社に奉納した記録はある）。
なお、筆者は行英の門人を十六名まで確認している（表3-1参照）。

（注1）実際に掲額されたかの確証はない。

No	門 人 名	出典	住 所	算額場所	神文
1	田中與八郎信直	A、B	比企郡古寺村（小川町）	慈光寺（ときがわ町）現存するも風化が進み非公開	神文 文政11年
2	馬場與右衛門安信	A、B	比企郡腰越村（小川町）		神文 文政9年
3	久田善八郎儀知	A	比企郡腰越村（小川町）		
4	石井彌四郎源和義	A、B	原市場村（飯能市）	子の権現（飯能市）非現存	起請文 文政6年
5	栗島寅右衛門精彌	A	比企郡竹澤村（小川町）	箭弓稲荷社（東松山）非現存	
6	山田泰助源清房	A	上毛甘楽郡馬山邑(下仁田町)	貫前神社（富岡市）非現存	
7	喜多野(北野)多吉	B	上州緑野郡川除（藤岡市）		神文 文政8年
8	田幡元吉英棟	B	東上州佐位郡下渕名村(伊勢崎市)		神文 文政8年
9	澤田傳次郎	B	武腰越（小川町）		神文 文政9年
10	倉林庄蔵爲貞	B	上野緑野郡牛田村（藤岡市）		神文 文政9年
11	福田重蔵	B	比企郡笠原村（小川町）		神文 文政9年
12	山田要太郎	B	上野緑野郡藤岡町動堂(藤岡市)		神文 文政9年
13	嶋野善蔵	B	比企郡腰越村（小川町）		神文 文政9年
14	渋川要吉郎	B	上州甘楽郡　村		神文 天保7年
15	黒沢理八郎重栄	C	（熊谷市）	「合類算法」に門人としてあり	
16	勢登亀之進重羽	C	（熊谷市）		

出典は、A＝算法雑俎、B＝市川行英文書、C＝埼玉の算額・合類算法

表 3-1. 市川行英門人一覧

四章　市川行英の免状と門人の神文

「市川行英文書(8)」は日本学士院に保存されており、奥書に「大正八年一月市川志ん子蔵書を写す　筆者　高橋明治」とあるから、市川行英の縁者が所蔵していたものを高橋明治という人が写し取ったものであろう。

市川行英文書には、市川行英・吉澤恭周（上里町出身の和算家）等三人による歴経（天文学的内容で各種天文定数の導き方などを説明したもの。文政四年とあり行英十七歳の頃だが、吉澤恭周は文化十三年に亡くなっているから年代的に矛盾がある）や、行英宛の目録（和算の免状）、それに石井和儀等の起請文と十人の神文がある。

関流の免状は、見題・隠題・伏題・別伝・印可の五段階あったが、市川行英が受けた免状には文政九～十一年の三種類があり、見題・隠題・伏題に相当するものである。つまり行英二十一から二十三歳に毎年免状を受けていたことになる。そのうち文政九年（一八二六）のもの（見題）は次のようなものである。この内容の本文は関孝和が宝永元年（一七〇四）に門人の宮地新五郎に授けた算法許状(9)と同じであり、122年後も継続していたことになる。少し長くなるが掲げてみる。これには末尾に関孝和からの伝系が記されていて、最後は斎藤宣長とあるから宣長から授かったものである。なお、読み下しは文献10によった。

夫物生斯有象有象斯有　　夫物生ずれば、斯して象有、象有れば斯して数有。
数数之起也由来尚矣河　　数之起る也由来尚。河は図を出し、
出圖洛出書而適見自然　　洛は書を出し、而して適自然の数見す。
之数天生一地成于二倍　　天は一を生じ、地は二于成、三于倍而

于三而遂于四極于五而
變于十是圖書之妙其本
出于天地焉然則育於其
兩間者豈有逃之象哉日
以之正纒度月以之定晦
朔星以之分宿辰大凡世
之長短方圓横斜曲直遠
近細大椎(推?)而物之奇偶闔
闢進退消長非数則皆不
能占其實也大哉数之徳
也至哉数之妙也非見者
則未易與言矣而使其最
易得者莫若算法也軒轅
之世隷首始作此法至于
炎漢有劉徽之九章隷首
之作不世傳焉劉徽之法
後世稱焉即方田粟布之
屬是也人能学而通之大
則天地之数小則人事之
用可坐定矣何惟一項之

四于遂、五于極まり而十于変ず。
是図書之妙、其本は
天地于出ず。然ば則其両間に
育まれる者、豈之を逃るるの象有哉。
日は之を以て躔度を正し、月は之を以て
晦朔を定め、星は之を以て宿辰を分つ。
大凡世之長短方円・横斜曲直・
遠近細大・物之奇偶・闔闢・
進退・消長を推す。数に非ば則皆
其実を占むること能わざる也。大なる哉数之徳也、
至れる哉数之妙也、見るに非ざる者は
則未だ与に言うに易からず。而して其最も
易く得し使むる者は、算法に若くはなし。
軒轅之世隷首始めて此法を作り、
炎漢于至り炎漢之九章有。隷首
之作世伝わらず。劉徽之法
後世これを称す。即ち方田粟布之
属是也。人能学而之に通ぜば、則大
ならば天地之数、小ならば則人事之用、
座して定む可、何惟一項之

躔度＝軌道？
晦朔＝みそかとついたち
闔闢＝開閉
軒轅＝黄帝
隷首＝黄帝の臣
炎漢＝漢王朝別名

芸云乎　　　　芸と云うべけんや。

目録

首巻

太極　両儀　四象　河圖　洛書　基数　大数　小数　三成　諸率

算法草術　九章　加減乗除法　開除法　籌策　統術　点竄　一算盈朒　之分法

統術解　同秘傳　同目録解　単伏点竄　再乗和門　諸法根源　平垜解術

圓法玉率及弧矢弦玉欠論　算法□如　惣括

見題　　　　（↑見題とある）

據頻歳数学款扣前條
之目録傳與之崋因未
至免許之域不可妄他
漏但如有此道懇執之
徒以誓約雖畧以所聞
導之可也不可遽挾自
負□小成之心

（解読できず）

関新助藤原孝和

荒木彦四郎藤原村英
松永安右衛門源良弼
山路弥左衛門平主住
藤田権平源貞資

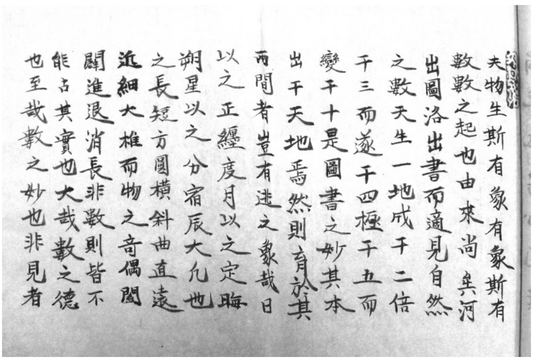

夫物生斯有象有象斯有
數數之起也由來尚矣河
出圖洛出書而適見自然
之數天生一地成千二倍
千三而遂千四極千五而
變千十是圖書之妙其本
出于天地焉然則育於其
兩間者豈有逃之象哉日
以之正經度月以之定晦
朔星以之分宿辰大凡也
之長短方圓横斜曲直遠
近細大椎而物之奇偶闊
闢進退消長非數則皆不
能占其實也大哉數之德
也至哉數之妙也非見者

図 4-1. 市川行英の見題免状（一部）
（大正８年の写）（日本学士院）

藤田権平源嘉言
小野良佐源栄重
齊藤四方藤原宜長　宜長印
文政九年丙戌十一月
市川玉五郎殿

目録の内容は和算の術を指しているが、中には意味不明の用語もある。次の隠題の免状の目録には次のようにある。文政十年丁亥十一月の日付がある。

太極　全積門　差分門　因積門　鉤股門
互換術　形容門　截積門　収約門又曰之分
離式門　諸角門　分合
形寫對換盈朒　鉤股變化之法

また文政十一年戊子二月の伏題の免状の目録には次のようにある。

無極　単伏演段　衆伏演段　単伏起術
離乗　両式演段　方程演段　交離　商一演段
因符　消長又曰加減反復　起率演段
両義式　潜伏式　造化式
諸角径術　解伏題蘊奥　交式斜乗之解

これらの目録により可成り広範囲に勉強していたことがわかる。

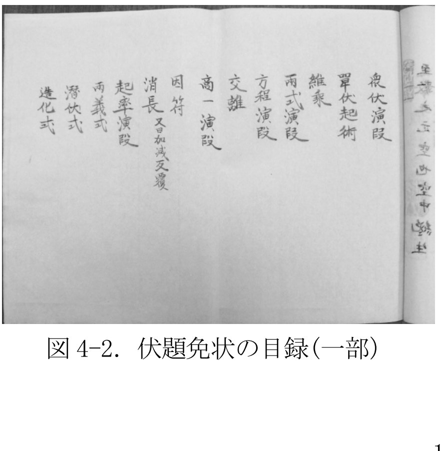

衆伏演段
單伏起術
離乘
両式演段
方程演段
交離
商一演段
因符
消長又曰加減反覆
起率演段
両義式
潜伏式
造化式

図 4-2. 伏題免状の目録(一部)

次に起請文（誓約書）について述べたい。起請文とは神仏に呼びかけてもし自己の言に偽りがあれば神仏の罰を受くべきことを書いて誓約したもので、誓いの内容を記した前書(まえがき)の部分と違背した場合に神仏の罰を蒙ることを記して神名を列記した神文の部分とからなる。「神文前書」と題することも多い。江戸時代にはかなり形式化したといわれるが、武術の天然理心流は入門に際して守秘及び門人の心得を宣誓する血判を押した神文を書いていたし、有名な測量家・伊能忠敬は測量の際に随行の内弟子等に血の起請文を書かせていた。(11)

市川行英文書には、次に示すように石井和儀の起請文と十人の神文がある。それは文政六年から天保七年までのものである。和儀の起請文は文政六年十二月とあるから十九歳のとき、行英も十九歳頃のもので和儀は最初の門弟かも知れない。市川行英は既に暦学・和算でそれなりの知識を得ていたのだろう。そして行英の代表作である「合類算法」を著した天保七年の行英三十一歳頃までこのような形で師弟関係を結んでいたのではないかと思われる。

文政六年十二月　武州高麗郡原市場邑　石井彌四郎和儀
文政八年正月　上州緑野郡川除　喜多野(北野)多吉
文政八年十月　東上州佐位郡下渕名村住　田幡元吉英$\boxed{\text{棟}}$
文政九年$\boxed{\text{一}}$月　武州腰越　澤田傳次郎
文政九年正月　上野緑野郡牛田村　倉林庄蔵爲貞
文政九年二月　比企郡笠原村　福田重蔵$\boxed{\text{竹}}$算
文政九年二月　上野緑野郡藤岡町動堂　山田要太郎
文政九年八月　比企郡腰越村　嶋野善蔵
文政九年八月　武州比企郡腰越村　馬場與右衛門（慈光寺の算額掲題者）

文政十一年八月　中武陽下古寺村　田中與八郎源信直（慈光寺の算額掲題者）
天保七年三月　　上州甘楽郡□□村　渋川要吉郎

因みに先の慈光寺の算額の掲題者・田中信直の神文は次のようなものだが、他の九名の神文もほぼ同じ内容であり、このような文章は形式化されていたのだろう。

神文前書之事

一當流新撰之術一源之明算他言仕間鋪候
尤御免許以前指南仕間鋪事
一御傳授之算書之内他言申間鋪事
別而仕物替等仕間鋪候
一御指南之算書開板仕間鋪事学
他流仕候ハヽ御傳授之書写置候ハヽ不
残取集返進之上返神文可致事
右之條々於違犯者可蒙大日本
国中大小之神祇泰山府君御
罰者也
文政十一歳子ノ八月日
新田　若松萬次郎内
中武陽　下古寺村

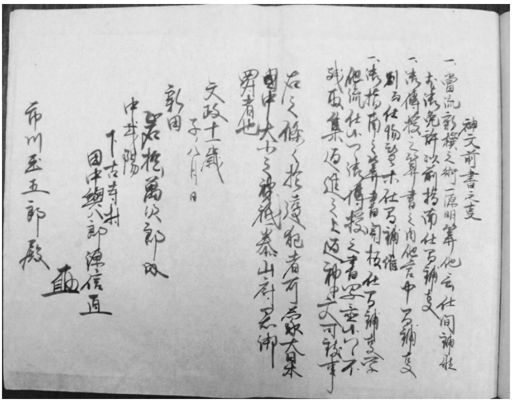


図 4-3. 田中信直の神文
（大正８年の写）（日本学士院）

田中與八郎源信直　花押

市川玉五郎殿

（注）開板＝木版時代の出版。泰山府君＝中国で
泰山の山神

石井和儀の起請文は他の神文とは少し異なっている。写し間違いもあるようだが、筆者には難しくて読めない個所が多いが、その一部を参考程度に次に掲げてみる。

算術以氣證文（起請文）ヲ新門奉願上候

武州高麗郡原市場邑

彌四郎自謙算道致厚鑿（うがち）候所

（略）誠行壹術一流之算道ヲ他流之師
傳ヲ請、又者門人外他流他言致間鋪、
諸算術秘満（秘密か）之條ハ、假令（たとい）親子兄弟成其（共か）
算道之新門不入者、何ヶ様にて候共、
弘傳多案可致慮ハ、如當之子孫曾孫玄
孫末代ニ至迄、門人途相違無之、相傳
可申脩事右之書面如斯之御座候、若シ哉
去言疑ニおよび、違来甚節我意身體之志
ス処□之有條知□□日本大小之神祇諸神
天之賞罰可蒙（略）

文政六癸未年十二月日

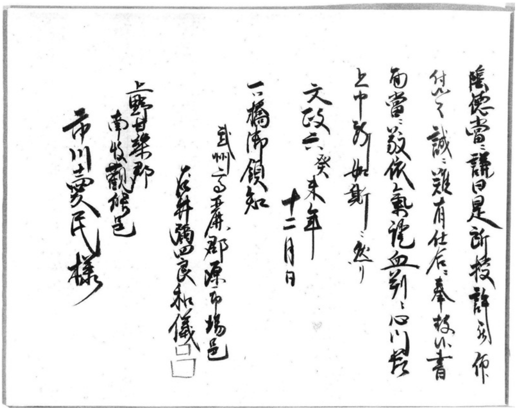


図 4-4.　石井和儀の起請文の一部
（大正８年の写）（日本学士院）

一ッ橋御領知

武州高麗郡原市場邑

石井彌四郎和儀　□□

上野甘楽郡

南牧観能邑　（現・群馬県甘楽郡南牧村勧能）

市川愛民様　（行英は愛民とも号した）

この起請文は「算術起請文を以て新門願上奉候」とあるから明らかに入門のとき差し出したものに違いない。意味のわからない個所も多いが、このような起請文あるいはもっと簡潔な神文を提出するのは半ば形骸化していたようである。（注1）また、田中信直の神文には「免許以前指南仕間鋪事」とあるが、先にみたように市川行英が見題の免許状を受けたのは文政九年であり、石井和儀が起請文を行英に提出したのは文政六年である。つまり、最初の見題の免許状を受ける前に行英は門人を採っていたわけで神文の趣旨に行英自身が背いていたことになるが、このことも形骸化していたことと関係するのかも知れない。

（注1）例えば「和算家の旅日記」（佐藤健一著）に神文の例が掲載されているが、秘密性については否定されているようである。

五章　石井家文書

石井家に伝わる石井和儀の和算史料には次の八種類（A～Hとする。時代順に非ず、順不同）のものがある[12]。これらは、埼玉北西部の和算家・暦算家の一次史料がほとんど紛失している中にあって貴重な史料である。その他に「精要算法」などの刊本や手紙の断片、和算とは無関係の済口証文、読み物の手習い史料などがある。

（１）石井家文書Ａ　（綴物（とじもの）　二十四頁）

これは「算学啓蒙」[13]の中巻のうち、田畝形段門十六問と倉囤積粟門（そうとうせきわくもん）九問を書き写したものである。

算学啓蒙三巻は元の朱世傑が一二九九年に著したもので、我が国の数学に大きな影響を与えた。これによって算木による計算法や数字係数の方程式を解く天元術が初めて我が国に入ったという有名な書物である。紀伊の久田元哲が万治元年（一六五八）に訓点をつけて復刻した。

書き写した部分は簡単な図形の面積などを求める初歩的な問題である。設問は省略されていて、いきなり「答曰」に始まり、続いて解法が書き写されている。字体はまだ慣れていない書き方であり、表題や日付・氏名も記されていないが、恐らく石井和儀が和算の勉強を始めた頃のものであろう。

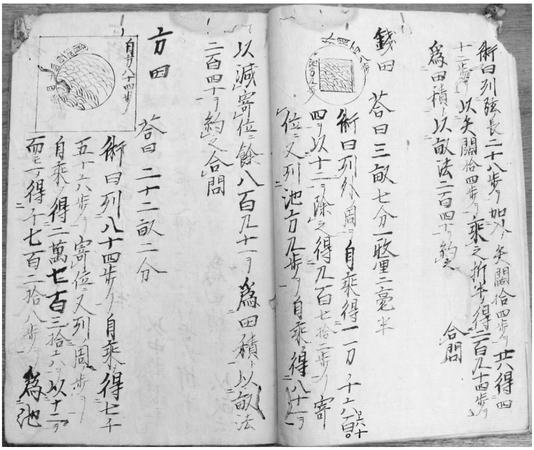


図 5-1．石井家文書Ａ（部分）

（２）石井家文書Ｂ　（綴物　二十頁）

この書物は後述する石井家文書Ｄの「改正算法」の内、東松山市の岩殿観音の問題を解いた下書きのようである。改正算法にあるのとほぼ同じ内容の傍書法による数式が沢山書かれている。表題はないが奥書に「文政十一戊子三月解術」とあり、石井和儀二十三歳のときの書物である。この下書きをもとに改正算法を書いたと思われる。詳細は石井家文書Ｄによる。

（３）石井家文書Ｃ　（バラ六枚）

点竄術（傍書法）を用いている。七問、二問、五問などの後に傍書法などが書かれているので、何かで示された問題を解くに当たっての下書きのようである。

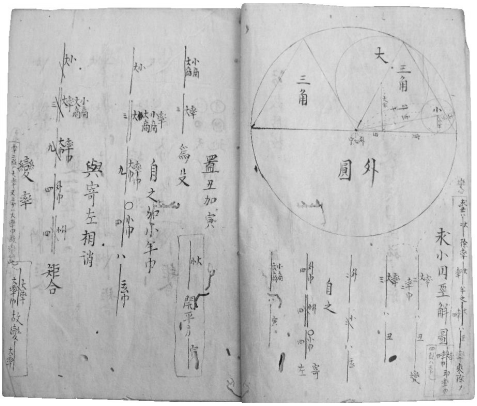


図 5-2.　石井家文書Ｂ（部分）
岩殿観音の算額の問題を解いている。

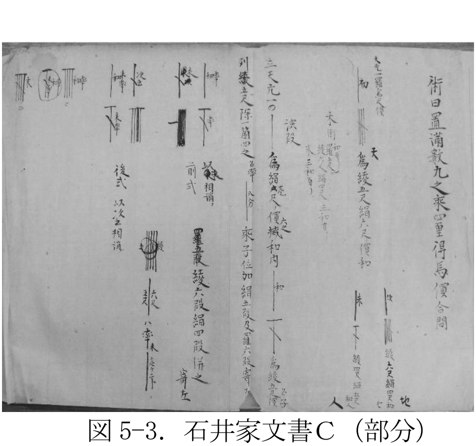


図 5-3.　石井家文書Ｃ（部分）

（４）石井家文書Ｄ　（綴物　四十頁）　石井和儀を知る上で貴重な史料である。

この書物の表紙、内表紙、目録、裏表紙には次のようにある。

表紙　奉納改正算法　全
内表紙　関流八傳市川玉五郎行英門人
　　　武州高麗郡原市場邑
　　　　石井弥四郎和儀
目録
坂東十番観世音堂者一條
並改正別術
同十一番　目録終
裏表紙　文政十一歳　子春解術

坂東十番観世音堂とは東松山市の岩殿観音（正法寺）のことであり、同十一番とは比企郡吉見町の吉見観音（安楽寺）のことである。石井和儀はこの両観音に掲げられていた算額の問題を書き写し、算額に載っている解き方ともう一つの別解あるいは改正（変形）した問題を作り、点竄（てんざん）術（傍書法）を用いて解いている。「改正算法」と名付けたのは別解もしくは改正した問題を作ったことによるのだろう。文政十一年（一八二八）春とあり、和儀二十三歳のときのものである。

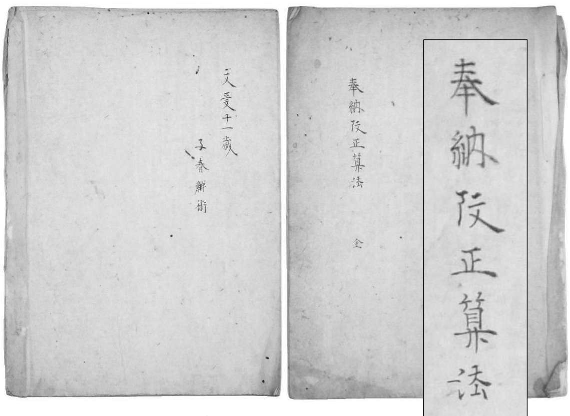


図 5-4. 石井家文書Ｄ
改正算法の表紙と裏表紙及び題字

岩殿観音の算額は文政六年（一八二三）に小高多聞治重郷（?～一八三七、享年80位、紫竹（川島町）の人）が掲額したものだが、岩殿観音は明治十一年に火災に遭っていてこのとき焼失した可能性もあり現存しない。そのため内容は「額題輯録」(14)（写本）という書物からしか確認できない（「埼玉の算額」(15)も「額題輯録」から引用している）。その内容は図5-5に示すようなものだが、「額高…」「門人十人ホトノ姓名…」とあり、額が高いところにあって全文が読みとれなかったためか、問題も術文も一部しか記述されていず、いわば「幻の算額」であった。

この算額を石井和儀は書き写していたばかりか、別解も示している。これにより「幻の算額」の内容が判明したことになる。ただ、年号や掲額者の名前、それに門人の名前が書き写されていないのは少々残念なことである。

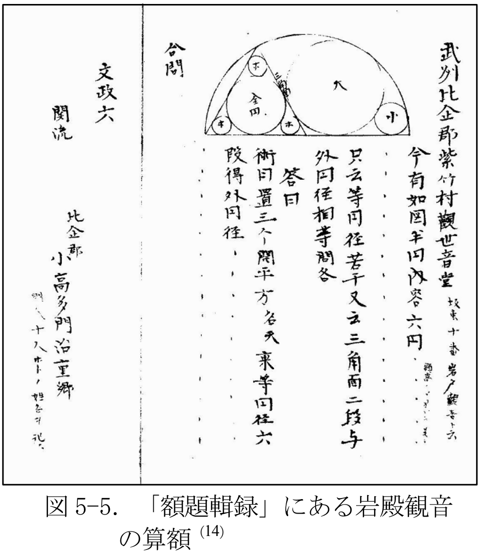


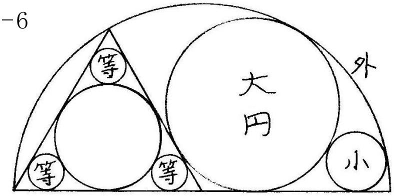
図 5-5. 「額題輯録」にある岩殿観音の算額 (14)

問題は図5-6のような図で、等円の径が与えられたときに、外円と大円、それに小円の径を求めるもので、次のように記述されている。

所懸千坂東十番観世音堂者一事
今有如圖半円内容三角面及隅角面
内外交罅(カ)六円只云者等圓徑若干乃
三角面二段 與外圓徑相等問外円徑大

（注）罅(カ)＝図形と図形の小さな部分(すきま)

図5-6



円徑小円徑得各其術如何
　答曰如左
術曰置三箇開平方名天乗等円六段得外円徑又曰天
二段之内減三箇名甲乗外円徑得大円徑次曰以甲除天
三段内減四箇餘名乙乗等圓徑十八段加大圓徑名丙乗大圓
徑開平方倍之以減丙位大円徑和内餘以乙冪除之ヲ
得小圓徑合問
　別術
術曰置一十二箇開平方名率乗等円徑三段得外円徑置
率三除之加一箇以除外円徑得大円徑置率加三箇五
分乗大円徑冪四十八段開平方減大円徑因率餘除率二段一十八
箇和自之除大円徑得小円徑合問


岩殿観音（正法寺）

○假等徑一寸

外徑一十〇寸三九
大徑　四寸八二　有奇
小徑　一寸七〇

（注）有奇＝余りのあること

読み下しは次のようになろう。
今図のように、半円内に三角面及び隅角面の内外に六円が接する場合、等円の径が与えられ、三角面の二倍と外円の径が等しいとき、外円の径、大円の径、小円の径を得る方法はいかに。
　答に曰く左の方法

計算方法は、３を置き平方に開き天と名付け、等円を乗じ６倍して外円径を得る。又曰く天を２倍し３を減じ甲と名付け、外円径を乗じて大円径を得る。次に曰く甲を以て天の３倍を除し、４を減じこれを乙と名付ける。これに等円径の18倍を乗じ、大円径を加えこれを丙と名付ける。これに大円径を乗じ平方に開き２倍し、丙に大円径を加えたものから減じたものを乙の巾（自乗）で除して小円径を得て問いに合う。

別の方法

計算方法は、12を置き平方に開き率と名付け、等円を乗じ３倍して外円径を得る。率を置きこれを３で除し１を加え、これを以て外円径を除して大円径を得る。率を置き3.5を加えたものに大円径の巾（自乗）を乗じ48倍する。これを平方に開き、大円径に率を掛けたものを減じその余りに、率を２倍し18を和したもので除し、これを自乗し大円径で除して小円径を得て問いに合う。

これらの解法をまとめると図５-７のようになる。図中の①式と②式は計算すると一致する。

なお、石井和儀が解いた別術の解法を付録１に示すが、小円径を求めるの

等円、大円、小円、外円の径をd_1、d_2、d_3、Dとすると、

$\sqrt{3}=\text{天}$、 $6\sqrt{3}\,d_1=D=\text{外円径}$、 $2\sqrt{3}-3=\text{甲}$、

$\left(2\sqrt{3}-3\right)D=d_2=\text{大円径}$、

$\dfrac{\text{天}\times 3}{\text{甲}}-4=\text{乙}$、 $\text{乙}\times d_1\times 18+d_2=\text{丙}$、

$\sqrt{\text{丙}\times d_2}\times 2=A$、 $\dfrac{\left(\text{丙}+d_2\right)-A}{\text{乙}^2}=d_3=\text{小円径}$ ……①

別術

$\sqrt{12}=\text{率}$、 $\sqrt{12}\times d_1\times 3=6\sqrt{3}\,d_1=D=\text{外円径}$、

$$D\div\left(\frac{\sqrt{12}}{3}+1\right)=\left(2\sqrt{3}-3\right)D=d_2=\text{大円径}$$

$48\left(\sqrt{12}+3.5\right)d_2^2=B$、 $\dfrac{\sqrt{B}-\sqrt{12}\,d_2}{2\sqrt{12}+18}=C$、

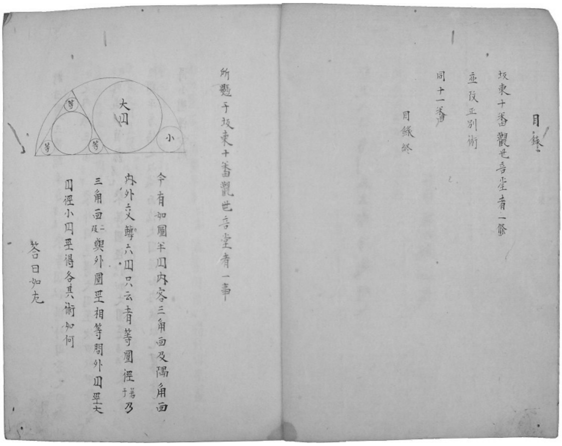
$\dfrac{C^2}{d_2}=d_3=\text{小円径}$ ……②

①②は共に次式のようになり等しい。

$$d_3=\frac{-123+72\sqrt{2}+150\sqrt{3}-62\sqrt{6}}{529}D$$

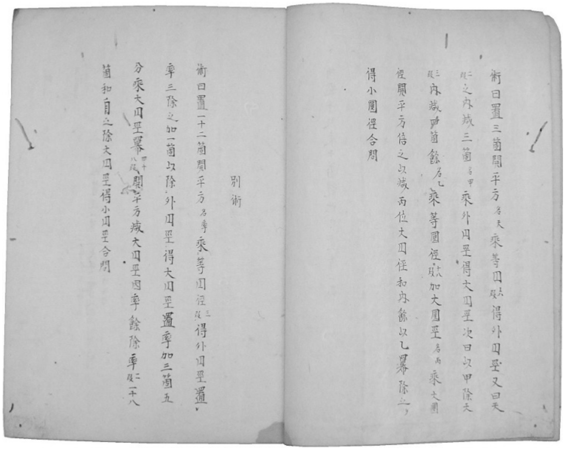
図 5-7. 岩殿観音の算額の解法式

に少々煩雑に計算（和算における二次方程式）している。


目録
坂東十番觀世音堂者一條
垂段正別術
同十一番
目録終

所懸于坂東十番觀世音堂者一事
今有如圖半円内容三角面及隅角面
内外交蝉六円只云青等圓徑若干乃
三角面二段與外圓巠相等問外円巠大
円徑小円巠得各其術如何
答曰如左

図 5-8．改正算法の岩殿観音の問題


術曰置三箇開平方名天乘等円六段得外円巠又曰天
二段之内減三箇名甲乘外円巠得大円巠次曰以甲除天
三段内減四箇餘名乙乘等圓徑十八段加大圓巠名丙乘大圓
徑開平方倍之以減丙位大円徑和内餘以乙冪除之
得小圓徑合問

別術
術曰置一十二箇開平方名亭乘等円徑三段得外円巠置
亭三除之加一箇以除外円巠得大円巠置亭加三箇五
分乘大円巠冪四十八段開平方減大円巠因亭餘除亭二段一十八
箇和自之除大円巠得小円巠合問

図 5-9. 改正算法の岩殿観音の問題（術文）

吉見観音の算額は、文政五年（一八二二）四月に関流の矢島久五郎豊高が掲額したもので、門人二十一名、世話人二名の名も書かれていて（図5-10のように現存）、それなりの勢力を誇っていたようである。矢島久五郎豊高の伝系は不明である。銀谷邑とは比企郡吉見町である。

問題は二問あるが、石井和儀が書き写したものは現存の算額の順番とは何故か逆になっている。次のような

ものである。

所懸千坂東十一番観世音堂者二事

今有如圖鈎股弦内隔中鈎大平円徑小
平円徑容二箇只云者從大平円徑小平円
徑者四寸短亦云者從股弦者一尺長鈎
股弦大円徑小円徑各問幾何

鈎三尺股四尺弦五尺

答 大円徑一尺六寸
小円徑一尺二寸

（術文省略）施主銀谷邑
矢嶋久五郎豊高

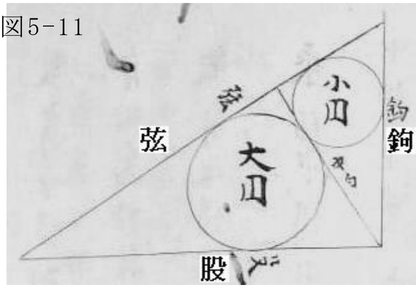


図5-11

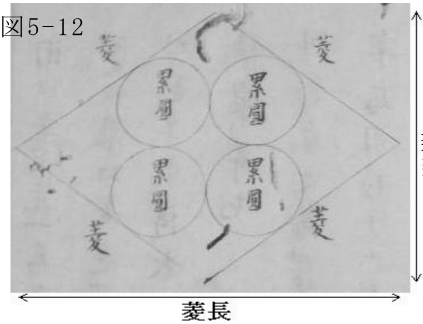
この問題は、直角三角形の直角の頂点から斜辺（弦）へ垂線（中鈎）を引き大円と小円があるとき、条件に従って二つの円の直径を問うものだが、石井和儀は「右改正二條内一條一條者別書出」として、大小円径の差と股弦の差が与えられたときに股長を求める問題（只云大小円徑差若干又云股弦差若干問得股術如何）に変形し、その解を与えている。

もう一つの問題は次のようにある。

図5-10. 吉見観音の算額（2010年5月写す）

所懸千坂東十一番観世音堂者二事

図5-12



今有如圖菱面内容同寸圓徑四箇
只云菱長幕與横幕共和寸
平積四百歩別云外積四十五
歩四厘四毛菱長横圓徑菱
面各問幾何

答　菱長壹尺六寸
　　圓徑四寸菱面一尺
　　菱横壹尺二寸

（術文省略）下銀谷邑　施主　矢嶋久五郎豊高

吉見観音（安楽寺）

題意は、図のように菱面内に同じ大きさの円が四個（互いに接するように）があるとき、菱長の二乗と菱横の二乗の和が四百歩、また外積が四十五歩四厘四毫のとき、菱長、菱横、円径、菱面の大きさを問うものである。外積四十五歩四厘四毫とは、菱形の面積から四つの円積を除いた面積のことを言っている。実際に解いてみると円周率は3.16にしないと答と合わない。3.16は最初の数学書である毛利重能の割算書で用いているが、この時期でも用いられることがあったようである。

この問題に対しても、「右改正」として設問を若干変形し、その解を与えている。

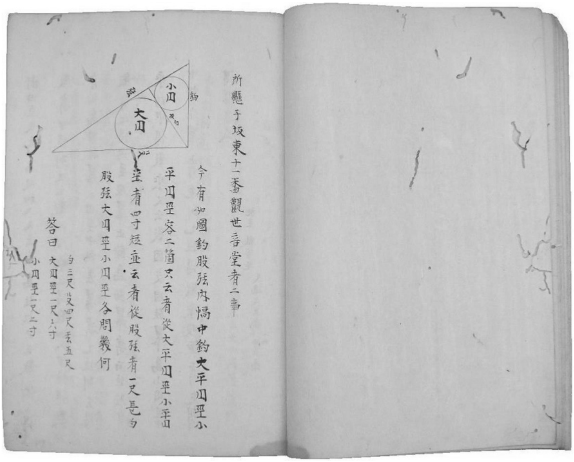


図 5-13. 改正算法の吉見観音の問題(1)

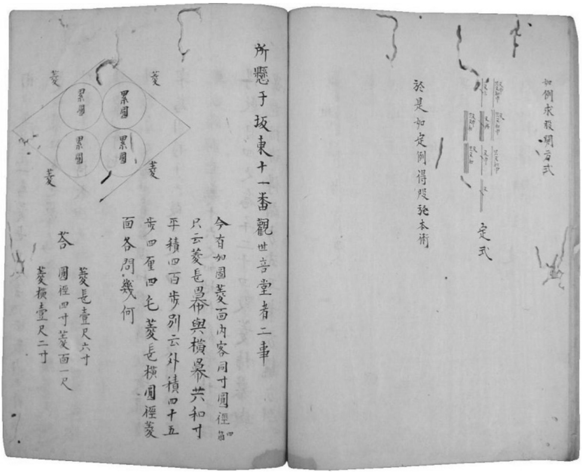


図 5-14. 改正算法の吉見観音の問題(2)

（５）石井家文書Ｅ　（綴物　二十六頁）

この書物も表題がないが、盈不足術（過不足術）、方程正負術（三元の一次連立方程式）、寄偶算、整数（直角三角形の各辺が整数）の四部門について計十五問を挙げている。盈不足術は九問、方程正負術は五問あり（五問目は解答していない）、いずれも「算学啓蒙」に載っている問題と同じである。寄偶算と整数の問題の出典は不明である。この書物も石井和儀の勉強の証である。奥書には「西上　関流市川行英門人　武州原市場邑人石井弥四郎和儀　印印」とあるが、年月の記述はない。印があるのはこの史料のみである。

盈不足術の問題例（下の読み下し参照）

今有人分レ銀不レ知二其数一只云人分二四両一剰一十貳両人分二七両一少六十両問二分人数幾何一

答曰　貳拾四人

術曰置盈不足和以三除之得人数

合問

> 今人有り、銀を分けるが其の数知れず、只云う人に四両づつ分けると十二両剰り、七両づつ分けると六十両不足する。人の数は何人か。
> 答は二十四人
> 計算は、過不足の和を三を以て除し人数を得る。〔（12＋60）÷３＝24〕

方程正負術の問題例（下式参照）

今有二羅四尺綾五尺絹六尺一直錢壱貫貳百一十九文羅五尺綾六尺絹四尺直錢一貫貳百六十八文羅六尺綾四尺絹五尺

> 次の３元１次方程式である
> $4x+5y+6z=1219$
> $5x+6y+4z=1268$
> $6x+4y+5z=1263$
> を x について解くと
> $45x=4410 \quad \therefore x=98$

直錢壱貫貳百六十三文問二羅綾絹尺價
各幾何一
答曰羅尺直九十八文
術曰置二四貫四百一十文一以二四十五一除レ之得二羅尺
價一合レ問

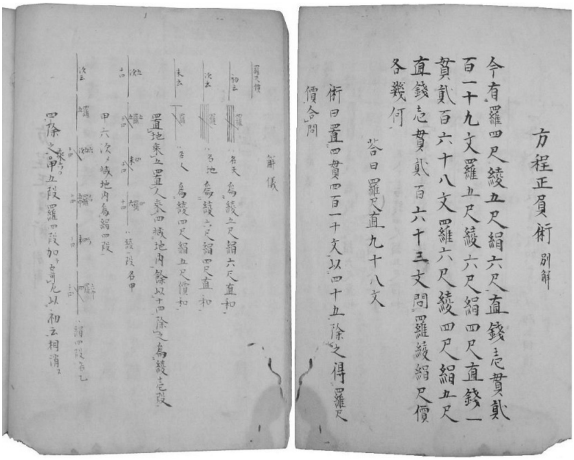

方程正負術 別解
今有羅四尺綾五尺絹六尺直錢壱貫貳百一十九文羅五尺綾六尺絹四尺直錢一貫貳百六十八文羅六尺綾四尺絹五尺直錢壱貫貳百六十三文問羅綾絹尺價各幾何
答曰羅尺直九十八文
術曰置四貫四百一十文以四十五除之得羅尺價合問

図 5-15．方程正負術の問題

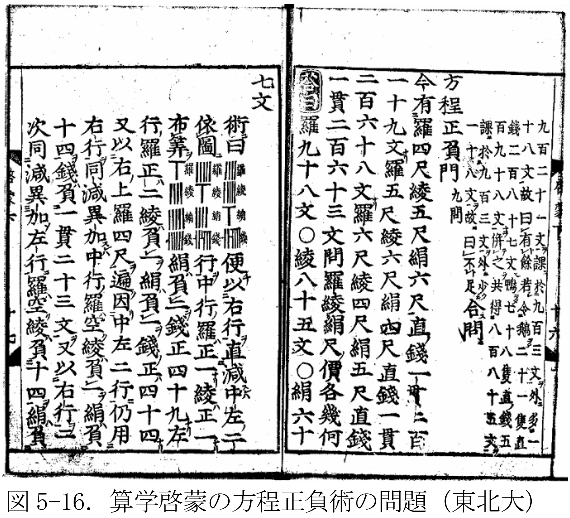

方程正負門 九問
今有羅四尺綾五尺絹六尺直錢一貫二百一十九文羅五尺綾六尺絹四尺直錢一貫二百六十八文羅六尺綾四尺絹五尺直錢一貫二百六十三文問羅綾絹尺價各幾何
答曰 羅九十八文○綾八十五文○絹六十七文
術曰 依圖布算 便以右行直減中左二行中行羅正一綾正二絹負二錢正四十九左行羅正二綾負二絹負二錢正四十四又以右上羅四尺遍因中左二行仍用右行同減異加中行羅空綾負二絹負十四錢負一貫二十三文又以右行二次同減異加左行羅空綾負十四絹負

図 5-16．算学啓蒙の方程正負術の問題（東北大）

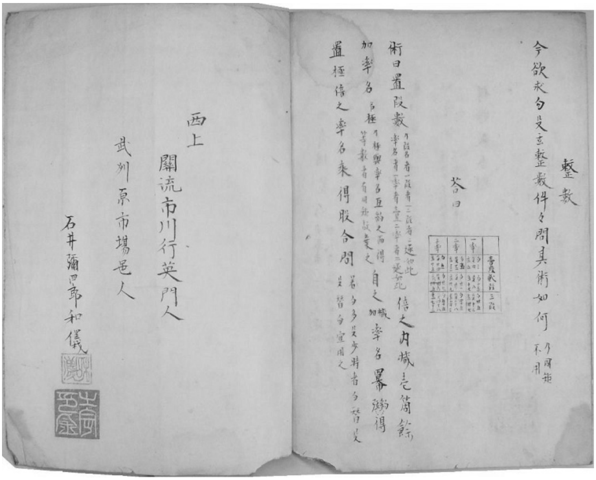


図 5-17. 整数の問題と奥書

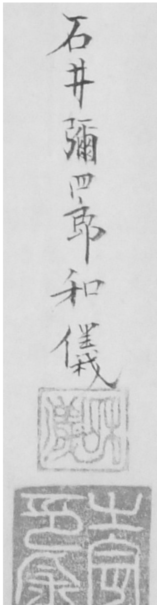


図 5-18

石井弥四郎和儀の署名と朱印

上の印は「和儀」、和は咊となっているがこのようなことはよくあるらしい。下の印は号と思われるが読み方は不明、「士定印金」か？

（６）石井家文書Ｆ　（綴物　二十二頁）

この書物には題や奥書などはなく、いつ頃のものか直接的には不明であるが、内容からして二十〜二十三歳頃のものだろうか。

五問の幾何図形を解いていて、一問目は上毛新町（高崎市新町）の於菊稲荷神社の算額、二問目は上毛榛名神社の算額、三問目は「精要算法」（藤田貞資）中巻の34問目である。四、五問目の出処は不明。これも石井和儀の勉強時代のものであろう。

於菊稲荷神社は中山道の新町宿にあり、江戸時代には栄えたようで絵馬の文化財が多数あることで知られている。算額もあったようだが、現在は複製の算額が二面あるのみである。

「賽祠神算」(16)という書物には於菊稲荷神社の算額の問題が三問載っており、その内の一問が石井和儀が書いたものと同じである（但し図形が上下逆となっている）。賽祠神算の序には天保二年（一八三一）とあるから年代的にはこの書物を見て写したとは考えにくく、実際に見学して書き写したのだろう(注1)。書き写したものは問題と答術のみで出題者や年月は記載されていないが、賽祠神算には「文政三年歳次庚辰五月　関流　増尾三太夫良恭門人　丸山左十郎佐平」とある。増尾三太夫良恭は小野栄重の門人である。問題の内容は、台形の三辺の長さが同じときに最大の面積になるもう一辺の長さを求めるもので次のように記述されている。現代では微分で解けるが、石井和儀はこの解を得るのに五頁に渡って傍書法で計算している。

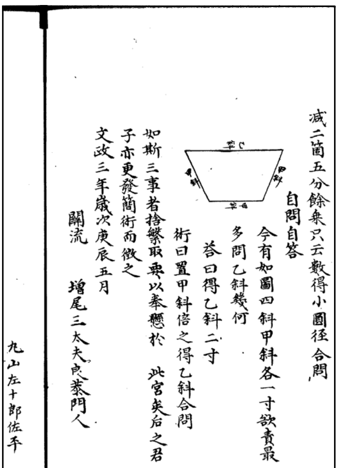
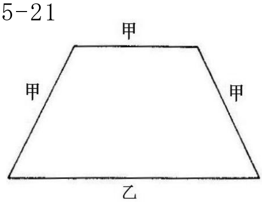

減二箇五分餘乗只云數得小圓径合問
自問自答
今有如圖四斜甲斜各一寸欲責最
多問乙斜幾何
答曰得乙斜二寸
術曰置甲斜倍之得乙斜合問
如斯三事者捨繁取要以奉懸於　此宮央后之君
子亦更發簡術而微之
文政三年歳次庚辰五月
關流　増尾三太夫良恭門人
丸山左十郎佐平

図 5-20. 賽祠神算から

図 5-19. 於菊稲荷神社

所掲干上毛新町於菊稲荷社者一事
今有如圖梯甲若干欲使積至
多問得乙術如何
答曰如左文
術曰置甲二之得乙問合

図5-21



（注）至多＝極大・最大のこと

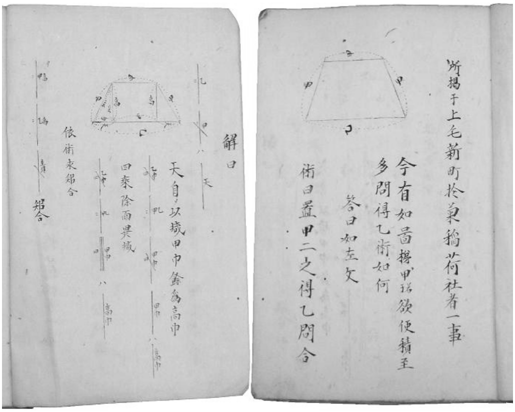


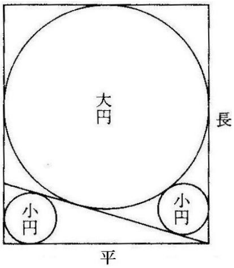
図 5-22. 石井和儀が書き写した於菊稲荷
神社の算額の問題と解き方の一部

図 5-23. 於菊稲荷神社の算額（複製）
左の逆台形のものが石井和儀が書き写
したものと同じ問題。（2012 年 1 月写）

榛名神社の算額は現存し、群馬県重要文化財に指定されている。この算額が当時の何かの書物に記載されている例は見つからない。石井和儀が実際に見学して書き写したものだろう。(注1) 問題は八問あり、五番目のものを書き写している。出題者は石田一徳（玄圭）の門人で五十嵐友四方明とあり、文化八年（一八一一）である。石田一徳は藤田貞資の門人で、八問は全て石田一徳の門人が出題したものである。書き写した内容は次のようなもので、図中の長を与えられたとき平を求めるものであるが、答は小円の径も書いてある。

所掲于上毛榛名山者八條之内
今有如圖直内隔斜容三圓只云
長七寸問平幾何
答曰平六寸メ小円徑一寸五分
術曰置長六之以七除之得平如四而一
得小円徑問合
高井郷石田一徳

図5-24



文化八辛未年　上州群馬郡本郷
四月朔日　門人　五十嵐友四方明

術文は、「長の六倍を置き七で除し平を得、四で除して小円径を得て問いに合う」というものである。「得平如四而一」（へいをえてしのごとくしかもいち）は平を得て四で割ることを意味する。(17)

なお、付録2に於菊稲荷神社と榛名神社の算額の問題について、石井和儀が解いた内容を示す。

（注１）時代性を考慮して和算書を調べてみたが、於菊稲荷の問題が載っているのは賽祠神算のみだが時代的に合いそうにない。また榛名神社の問題が載っているものは見つからなかった。これらのことから実際に見学して書き写したのだろうと推測する。が、榛名神社の算額は８問が一つの算額に記述されているから何故１問しか書き写さなかったのかの疑問は残る。

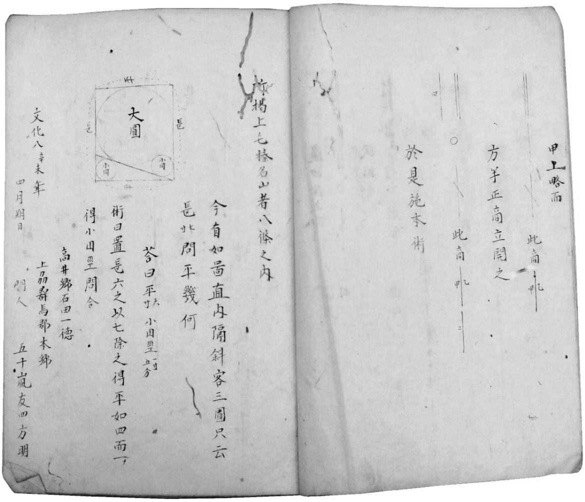


図 5-25. 石井和儀が書き写した榛名神社の算額の問題

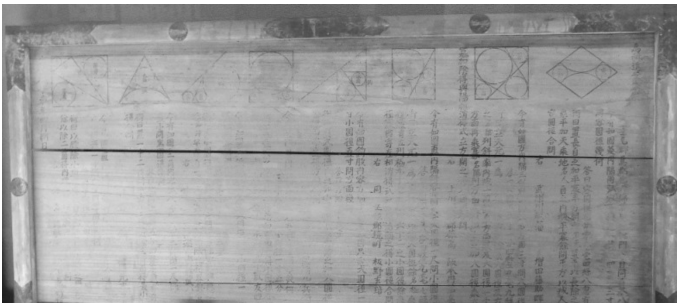


図 5-26. 榛名神社神幸殿に掲げられていた算額（群馬県重要文化財）現在は榛名歴史民俗資料館にある。この算額には８問あり、石井和儀が書き写したのは右から５番目のものだが、風化していて明瞭ではない。（2012 年１月写）

（７）石井家文書Ｇ　（仮綴　四十四頁）

表題や日付、署名などはない。比較的簡単な幾何図形の問題三十九問を掲げ解（術文）を与えているが、解き方に至る文（解術）は省略されているものが多い。解術のある問題も文章で長々と書いてあり傍書術などは使っておらず、初期に習ったことを伺わせる。直角三角形内に円を置くものや直角三角形を分割した問題が一番多く、他に角切や台形、菱形、三角形などの問題がある。出典は不明。

二、三例示する。

十七問目は直角三角形内に図のように、大円、中円、小円を接するようにおいたときのそれぞれの径を求めるものである。補助線を入れて解いている。

十八、十九問目は菱形内に図のように四つの円を接するように置いたときのそれぞれの径を求めるものである。

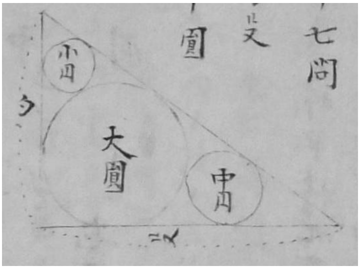


図 5-27. 十七問目の問題

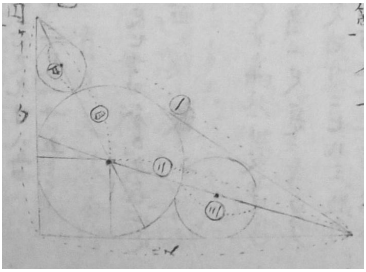


図 5-28. 十七問目の補助線

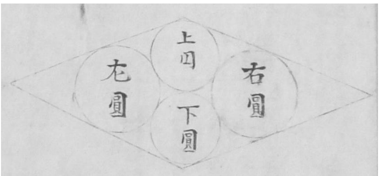


図 5-29. 十八問目の問題

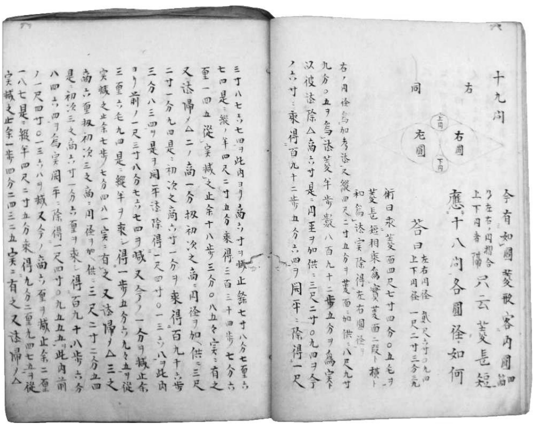


図 5-30.
十九問目の問題と術文

三十八問目は、六丈二尺五寸の糸を図のように星形にした場合に、内側の五角径の一辺の長さを問うものである。

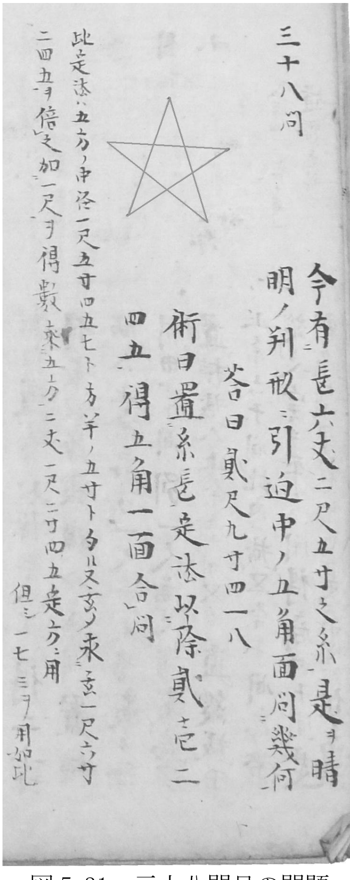


図 5-31. 三十八問目の問題

（８）石井家文書Ｈ　（仮綴　六十六頁）

この書物も表題等はなく日付もない。綴じ方も正式でなく仮に綴じている。極数題、招差術、垜術、それに円理の問題を扱っている。いずれも時代的には既知の問題であるが、石井和儀が相当勉強した証の史料でもある。特に円理の問題は積分の概念を正しく理解していることが伺え、子の権現の算額の問題に通じるものであって貴重である。

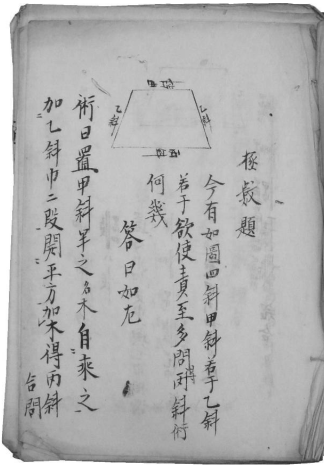


図 5-32. 極数題

極数題は、極大極小（最大最小）の問題を扱うもので三問を述べている。その内一問は於菊稲荷社の問題と類似のものである。

招差術とは多項式の係数を決定する方法だが、この書物では「渾沌招差之術」とある。この招差術に続いて次の垜術を展開している。

垜術については三角衰垜、平方衰垜などを求めている。垜とは積み重ねるという意味で一番簡単なものは俵すぎ算の1,2,3,4,5,6…である。

三角衰垜とは、1,3,6,10,15,21,28…の数列で、n番目（底子（ていし）という）までの総和を求める問題で次のようにある。

今有二三角衰垜一只云底子若干問得総数術何幾

答曰如左

術曰置底子加二三ケ一乗二底子一加二二ケ一乗二底子一

以レ六約之得総数三角衰垜責合問

術は、「底子を置き3を加え、それに底子を乗じ、2を加え、それに底子を乗じ、6を以て約せば三角衰垜責の総数を得る」というものである。（式1）

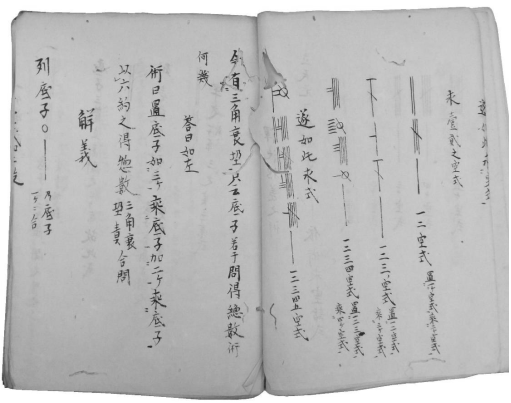


図5-33. 三角衰垜の記述部分

また平方衰垜とは、1^2,2^2,3^2,4^2…の数列でn番目までの総和を求めるものである。

今有二平方衰垜一只云底子若干問得総数術何幾

答曰如左

術曰置底子加一ヶ五分乗二底子一加五分

乗底子ヲ以レ三約レ之得総数合問

術は、「底子を置き1.5を加え、それに底子を乗じ、0.5を加え、それに底子を乗じ、3を以て約せば三角衰垜責の総数を得る」というものである。（式２）

円理関係では円に内接する矩形を作り（図5-34）、これらの和として円の面積や円弧の長さを求めている。つまり極限の概念と積分の概念に通じるものである。

円周率の求めは次のように記述されている。

求円周解

置二定円責一四之除円径得円周

三	一巾	三巾	五巾	七巾	九巾	十一巾
円径	原	一差	二差	三差	四差	五差
	四 六	八 十	十二 十四	十六 十八	廿〇 廿二	廿四 廿六

（式３）

次頁下の横書の式３に該当する

術曰置二三箇ノ円径一為原数乗二一巾一

四六除為二一差一乗三巾一八十〇除為二二差

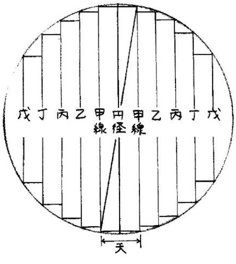


図5-34. 円の分割

（式１）

$$\frac{\{(n+3)n+2\}n}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

（式２）

$$\frac{\{(n+1.5)n+0.5\}n}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

乗二五巾一十二十四除為二三差一逐如レ此求一差

置二原数一加二諸差一得二円周一合レ問

これにより、円周率を、3.1415926百奇有としている。ここに出て来る式は、松永良弼が「方円算経」（元文四年（一七三九））の中で求めた式と本質的には同じである。松永良弼はこの式により和算史上最高の小数点以下四十九桁まで求めているが、石井和儀が正しく求めたのは、この書物では小数点以下七桁までである。

なお、石井和儀が学んだ円理関係のものについて、その解読を付録３に示す。また写しを付録９に示す。

（参考）飯能市虎秀出身の天文暦学者・千葉歳胤（一七一三～八九）は、「天文大成真遍三條図解」（一七五八）の中で別の方法（建部賢弘の綴術算経）により小数点以下十三桁（十桁まで正しく十一桁目も近似値）まで求めている。[3]

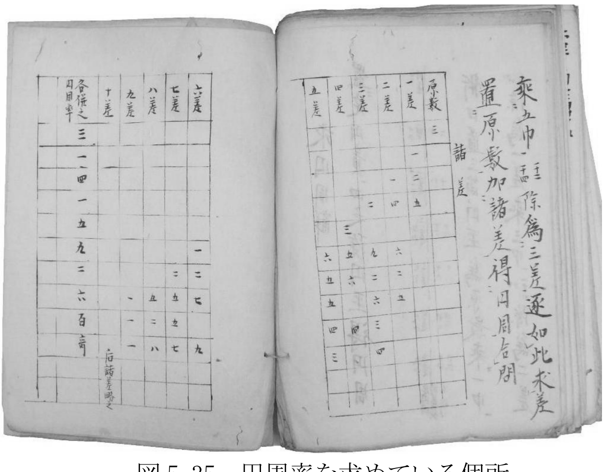


図 5-35. 円周率を求めている個所

（式３）

$$\text{円周率} = 3d + \underbrace{\frac{\text{原数}\cdot 1^2}{4\cdot 6}}_{\boxed{\text{一差}}} + \underbrace{\frac{\text{一差}\cdot 3^2}{8\cdot 10}}_{\boxed{\text{二差}}} + \underbrace{\frac{\text{二差}\cdot 5^2}{12\cdot 14}}_{\boxed{\text{三差}}} + \underbrace{\frac{\text{三差}\cdot 7^2}{16\cdot 18}}_{\boxed{\text{四差}}} + \underbrace{\frac{\text{四差}\cdot 9^2}{20\cdot 22}}_{\boxed{\text{五差}}} + \underbrace{\frac{\text{五差}\cdot 11^2}{24\cdot 26}}_{\boxed{\text{六差}}} + \cdots$$

（９）石井家文書　その他の史料

①刊本「精要算法」（部分）　藤田貞資の有名な書物である。天明元年（一七八一）刊。石井和儀が学んだものであろう。残念ながら部分的にしか残っていない。

②手紙断片（和算に関係する手紙、九章で後述）

③済口証文　「文政十一子年六月　写人　弥四郎」とある。石井和儀二十四才のときのものである。

④読み物の手習い史料

女仇討ち（奥州仙石女敵討之事）他

目録

宮城野信夫兵法稽古之事
油井正雪兵法指南之事
兄弟之娘奥州江下ル事
白石之城下ニ而敵討之事
油井正雪併送り之者共御襲員之事
兄弟之娘鎌倉仮居之事
・・・

奥書には、「文政元寅歳　霜月吉日　写之　武州高麗郡原市場村　石井弥四郎　此本何方様江参り候共御覧之上早速御返し可被下候以上」とある。石井和儀十四才のときのものである。

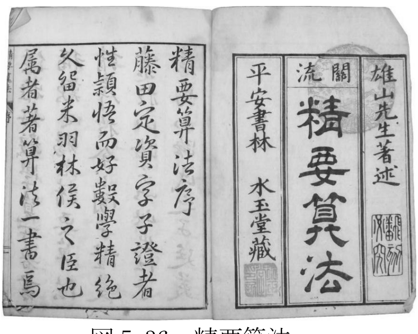


図 5-36. 精要算法

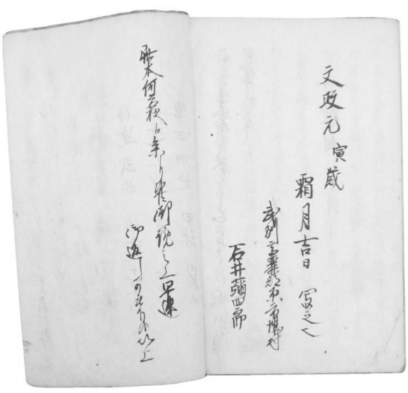


図 5-37. 読み物手習い史料の奥書

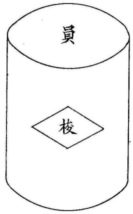
六章　子の権現の算額

三章で述べたように子の権現の算額は現存しないが、石井和儀が遺した最高レベルの問題である。この算額の問題は、円理八題(注1)の内の穿題（穿去問題）に関するものである。穿題とはある物体を別の物体が穿ち去る場合の問題であり、「算法雑俎」に記載されている石井和儀の算額の内容は次のようなものである。(1)

所掲于武州子権現社者一事

今有如圖員壔穿去梭　壔径若干梭長若干平若

干問得穿去積術如何



答曰如左術

術曰以径除長自之名率　置径乗

長及平半之為原数乗率一乗三四除為一差乗率一三

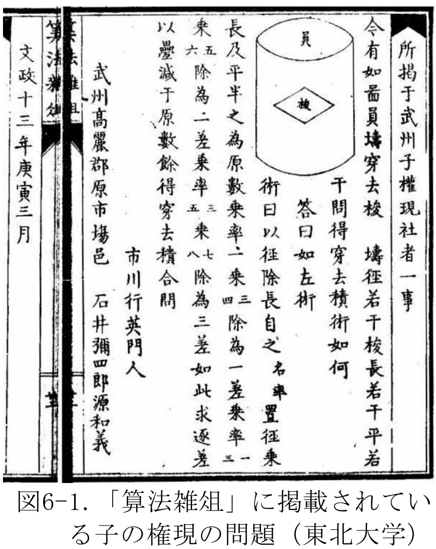
乗五六除為二差乗率三五乗七八除為三差如此求逐差

以疊減于原数餘得穿去積合問

市川行英門人

武州高麗郡原市場邑　石井彌四郎源和義

文政十三年庚寅三月



算法雑俎

所掲于武州子權現社者一事

今有如圖員壔穿去梭　壔径若干梭長若干平若

干問得穿去積術如何

答曰如左術

術曰以径除長自之名率　置径乗

長及平半之為原數乗率一乗三四除為一差乗率一三

乗五六除為二差乗率三五乗七八除為三差如此求逐差

以疊減于原數餘得穿去積合問

市川行英門人

武州高麗郡原市場邑　石井彌四郎源和義

文政十三年庚寅三月

図6-1.「算法雑俎」に掲載されている子の権現の問題（東北大学）

問題の読み下しは次のようになる。

今図のように円柱を梭(おさ)（菱形）で穿(うが)ち去る場合、円柱の直径と梭の長及び平を与えられたとき、穿去された体積を求める方法はいかに。

答に曰く左の方法

計算方法は、径を以て長を除し之を自(乗)し、率と名付け、径を置き長及び平の半を乗じ、之を原数とし、(原数に）率と1を乗じ3と4で除し一差とし、（一差に）率と1と3を乗じ5と6で除し二差とし、（二差に）率と3と5を乗じ7と8で除し三差とする。このようにして逐差を求め、これらを畳（加算）して原数から減じてその余りが問に合う穿ち去った体積を得る。

この問題は円柱を角柱で突き刺したとき、空洞になった部分の体積を求める典型的な穿去問題である。術文は短い。まるで俳句や和歌のように言葉を凝縮しており、そこに一つの美意識を持って書いているかのようである。その内容は図6-2に示したような漸化式になるものだが、本質的には積分問題である。

この問題を当時どのように解いたかを知るには石井和儀と同年代の梅村重得(しげよし)（一八〇四～八四）による「算法雑俎解」[16]が参考になる。傍書法で書かれた同書のものを解読すると、その解法は円柱の上面からみた角柱部分と側面からみた角柱の断面を積分するもので、現代の積分学が教えるのと同じ手法である。具体的には被積分関数を級数展開した上で項別積分を行い、その上で積分表を利用している。当時の識者の方法であったと思われるが、それにしても江戸時代末期に飯能でかかる高尚な数学が行われていたことは特筆に値するだろう。

付録4に和算による解法を、付録5に現代解法を示す。両者の違いは級数展開と積分をどちらを先に行うかという差である。

右図のように円柱の直径をd_1、棱の長をd_2、平をd_3

としたとき、率 $k=\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2$、原数$=d_1\,d_2\,\dfrac{d_3}{2}$

一差$=$(原数)$\times k\times\dfrac{1}{3\cdot 4}$、二差$=$(一差)$\times k\times\dfrac{1\cdot 3}{5\cdot 6}$、

三差$=$(二差)$\times k\times\dfrac{3\cdot 5}{7\cdot 8}$、・・・・

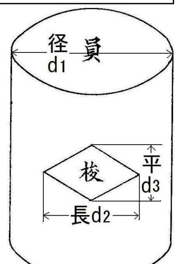
求める体積 V は、

$V=$(原数) －(一差＋二差＋三差＋・・・・・)

これは現代数学でいえば、次式で示されるものである。

$$V=d_1d_2d_3\int_0^1(1-x)\sqrt{1-kx^2}\,dx$$
$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}-\frac{(\text{原数})k}{3\cdot 4}-\frac{(\text{一差})k\cdot 1\cdot 3}{5\cdot 6}-\frac{(\text{二差})k\cdot 3\cdot 5}{7\cdot 8}-\cdots\cdot$$

図6-2. 子の権現の問題の解の式



（注１）円理八題とは、截（円や球を截った問題）、穿（穿ち取る問題）、受（影を描く問題）、廻（回転問題）、転（転がす問題）などをいう。

七章　和算上の位置付け

子の権現の算額の問題の和算上の位置付けはどのようなものだろうか。簡単に言及しておきたい。

江戸末期、特に化政期に和算は西洋の数学に匹敵するほどに発達した。それは特に積分において顕著であった。和算史上の四天王、関孝和（一六四二?～一七〇八）・松永良弼（よしすけ）（一六九二?～一七四四）・安島直円（なおのぶ）（一七三二～九八）・和田寧（やすし）（一七八七～一八四〇）のうち、松永良弼は級数展開で、安島直円は積分の考えの導入で、和田寧は積分表で大きな業績があった。特に和田寧は円理の完成者と言われ、和算の最高峰を築き、様々な積分表により複雑な立体図形の体積や表面積を求めることが和算家の間で可能となった。ここに至り、『一般方法が樹立した上は、従来単独の問題として論ぜられていた楕円周、穿去積等の問題は、ただその応用問題、演習問題に過ぎなくなったのである。従って寧より円理豁術を受けた当時の数学者が、種々の複雑な問題を解いて、これを神社仏閣に掲げ、あるひはこれを書に著し刊行するもの頗る多かったが、要するに和田寧の円理豁術の演習問題にうき身をやつした者であって、理論の発展に寄与した所は少ないのである[19]』、とまで後世評されるようになった。

とは言え、数多（あまた）の和算家の中で、その考え方を理解し、応用できる力量のある一線の和算家は少なかったことであろう。飯能周辺の算額を調べても比較的簡単な幾何図形などが多いのはこのことを物語っているようでもある。[20][21]

一般に難度の高い問題の一つに穿去（せんきょ）問題がある。穿去問題とは球や円柱・楕円体などの立体を、もう一つの円柱・角柱などで貫通した場合の体積や表面積・交周などを求めるもので、基本的には二重積分を解くことになる。最初にこの問題を扱ったのは安島直円で、円柱を他の円柱で貫通したとき貫通した部分の体積や表面積・周の長さを求めるものであった。その後和田寧が発展させ、白石長忠・岩井重遠・斎藤宣長などに影響を与

えた。市川行英、石井和儀もその流れを汲むものである。
文献（22）では算額に現れた穿去問題の数に言及している。それによれば日本全国で江戸末期の化政期から慶應年代までに、実に、107面の算額、問題数にして140題が、さらに文政年間で言えば40面の算額、問題数にして46題が確認できるという。(注1) 石井和儀の算額の問題や、市川行英同門の馬場安信（慈光寺の算額）、栗島精彌（箭弓稲荷社の算額）の穿去問題もその中の一つである。
石井和儀、馬場安信らがこのような問題を解き得たのは、何と言っても、藤田貞資─小野栄重─斎藤宣長─市川行英、あるいは安島直円─日下誠─白石長忠─市川行英という一流の系統に属していたことが大きかったと思われる。

（注1）原文は県毎に文化から昭和年代までの数を表にしている。掲げた数はその表から得た数字である。

八章　石井和儀の墓と生没年

石井家過去帳で石井弥四郎和儀に関係するものを探すと次のようになる。

萬嶽了忠居士　　明治四年二月廿一日
　石井弥四郎　　六十七年二ヶ月
守室堅貞大姉　　弘化元年甲辰年六月一日
　石井シケ　　　弥四郎妻　三十七年六ヶ月
石永徳順大姉　　嘉永五壬子五月二十四日
　石井タミ　　　宇兵衛妻　八十年五ヶ月

また、石井家の墓地である西光寺（今は廃寺、飯能市原市場、棒ヶ谷戸）の過去帳[23]の嘉永五子年の項には次のようにある。

石永徳順大姉　　五月二十四日　赤工　弥四郎母

石井家過去帳は後世に記述されたようであるが、それは西光寺の過去帳を基にしているようである。萬嶽了忠居士を記したであろう西光寺の過去帳は拝見できなかったが、石永徳順大姉の例はそれを示しているようである。

西光寺には、図８－１、２に示すような墓がある。過去帳の居士、大姉、卒年などはこの墓と一致する。つ

まり、石井弥四郎和儀の戒名は「萬嶽了忠居士」であり、生没年は「文化元年（一八〇四）十一月七日生、明治四年（一八七一）二月二十一日亡」（六十七歳）ということが判明する。また石井家過去帳と照らし合わせれば、妻とは三歳違いで石井和儀四十歳のときに妻を亡くしていることや、母が石井タミであることもわかる。

右側面の「天保十五辰六月朔日　施主　石井鏸三郎」というのは、妻が亡くなったときに建てられたと思われ（天保十五年と弘化元年は同年）、石井和儀が亡くなった後に改めて、「萬嶽了忠居士」と「明治四年二月二十一日亡」を刻印したと思われる。

この生没年の事実により、石井弥四郎和儀は、師の市川行英とまったく同年代の人であり、行英に入門にあたって起請文を提出した文政六年（一八二三）は十九歳のときであり、子の権現に算額を奉納した文政十三年（一八三〇）は二十五歳のときということがわかる。

図8-1．石井弥四郎和義の墓


図8-2．石井弥四郎和義の墓の写真（平成23年9月29日）

九章　おわりに

算法雑俎の出版のとき、問題の掲載料として弟子の出題は署名入りで一題につき約一朱であったという[4][9]。現在の一万円位であろうか。それはともかくとして、算額を掲額するにはそれなりの財力も必要であったであろう。石井和儀はどのような仕事をしていたのだろうか。そして、和算の盛んな時代背景はあるにしても、他の市川行英門人と同じように、どのような動機で、どのようにして最初に行英に入門したのだろうか。わからないことは多い。

さらに、飯能の田舎で、距離的な問題も含めてどのように市川行英に師事したのだろうか。免状は受けたのだろうか。

石井和儀が起請文を提出した文政六年から子の権現の算額の文政十三年は、行英・和儀とも十九から二十五歳頃である。算法雑俎には行英が文政九年に信州雨宝山（雨宝山弁天堂：現佐久市か）に、また文政十年に江戸神田明神に掲額した問題が載っている。さらに三章で述べた「市川玉五郎氏略伝」には遠州流挿花を学び文政十一年に一観と号したことが載っており、これも恐らく江戸でのことであろうと思われる。つまり、行英二十三歳頃にはすでに信州や江戸は行動範囲の中にあった訳であり、そこから推測すると、遊歴和算家として先に見た市川行英文書の神文にあるような各地をそれ以前に巡っていたのではないかと思われる。とは言っても頻繁に会うのも難しい時代であったから、飛脚などの通信教授的なものも併用されていたのかも知れない。原市場の石井和儀もそのような中の一人であった

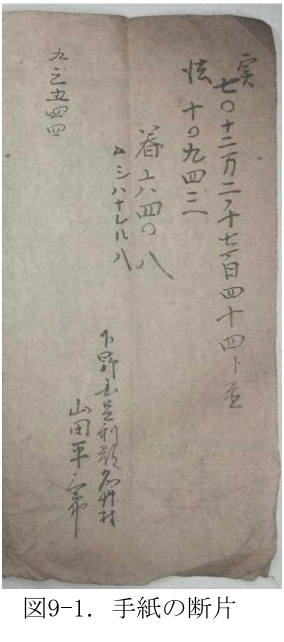


図9-1. 手紙の断片

のだろう。現に、石井家文書には図9-1に示すような手紙の断片もあり、それには「実七〇十二万・・ 法十〇九四三 答六四〇八 下野国足利郡名草村（現・足利市名草）山田平三郎」とある。これは明らかに天元術で何かの問題を解いて、足利の山田平三郎という人が石井和儀に送ったものであろう。つまり遠方の人と和算の問題をやり取りしていたということであろう。どのようにして山田平三郎と知り合ったのか不明だが、石井家文書にあるように岩殿観音、吉見観音、於菊稲荷、榛名神社など埼玉から群馬にかけて行動していた可能性のあるところをみると、それ以外の場所にも遊歴和算家的に行動した可能性も否定できない。そのような環境の中で師や仲間達と勉強し、石井家文書の円理関係の史料にあるように、当時としては高度な積分問題まで理解するようになり、子の権現の算額の問題を自ら作り、そして解くに至るようになったのであろう。驚くばかりである。

なお、石井和儀が子の権現に掲額した以降、つまり二十六歳以降について知る史料が見つからないのは残念なことである。

【参考文献】

（1）「算法雑俎」東北大学和算ポータルサイト
（2）「北武蔵の数学」三上義夫（郷土数学の文献集(2)萩野公剛 富士短期大学出版部 昭和40年）他
（3）「天文大先生 千葉歳胤のこと」山口正義（まつやま書房 2009年）
（4）「和算の歴史」平山諦、「明治前日本数学史」、「増修日本数学史」、インターネットwikipediaなどから。
（5）「慈光寺の算額」山口正義（あゆみ34号、毛呂山郷土史研究会 平成22年）
（6）「増修日本数学史」遠藤利貞遺著・三上義夫編

（7）「市川玉五郎氏略伝」日本学士院所蔵和算資料5801
（8）「市川行英文書」日本学士院所蔵和算資料5657
（9）「日本人の数学」下平和夫（講談社学術文庫　2011年）
（10）「和算家物語　―関孝和と甲州の門下たち―」弦間耕一（叢文社　2008年）
（11）「伊能忠敬」今野武雄（社会思想社　現代教養文庫1650　2002年）
（12）「石井家文書」飯能市郷土館委託資料
（13）「算学啓蒙」東北大学和算ポータルサイト
（14）「額題輯録」東北大学ポータルサイト
（15）「埼玉の算額」埼玉県立図書館　昭和44年　Ｐ56
（16）「賽祠神算」東北大学ポータルサイト
（17）「榛名町史　資料編３　近世」P340
（18）「算法雑俎解」東北大学和算ポータルサイト
（19）「明治前日本数学史（第４巻）」岩波書店　1959年初版　Ｐ14
（20）「毛呂周辺の算額」山口正義（あゆみ35号、毛呂山郷土史研究会　平成24年）
（21）「算額を解く」大原茂（さきたま出版会　平成10年）
（22）「算額にあらわれた穿去問題について」小林・田中（数学史研究　通巻90号　1981年）
（23）「西光寺過去帳」飯能市郷土館資料

付録１　岩殿観音の算額の解法（石井家文書Ｄより）

石井和儀が解いた岩殿観音の算額の内容は次のようなものである。
以下の式で、等円、大円、小円、外円の径をそれぞれ d_1、d_2、d_3、D とする（下図参照）。
また〇数字で該当する現代式を下段に示す。

坂東十番観世音堂　解義

① 七分五厘 開平方 名率、三箇 開平方 名大率、十二箇 開平方 定率

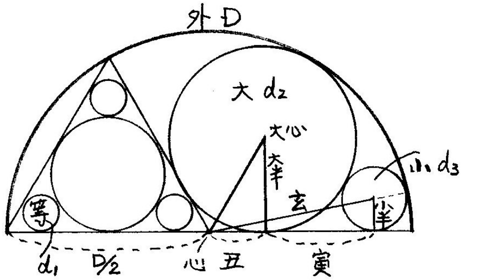
依術求外円径

② 等定率 八 外径、大率 八 中鈎、三大率 八 丑

③ 外 二大 大率 八 子

置子加丑寄左與外半径相消（子を置き丑を加え左に寄せ外半径を消す）

④ 外 二 三大率 二大 矩合



① $\sqrt{0.75}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=$率、$\sqrt{3}=$大率、$\sqrt{12}=$定率$=2\sqrt{3}$

② $3\cdot$等$\cdot$定率$=3d_1\sqrt{12}=6\sqrt{3}\,d_1=D$、$d_2\sqrt{0.75}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}d_2=$中鈎、$\dfrac{d_2\sqrt{0.75}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}d_2=$丑

遍乗二変率

⑤
外
大率 大
大
矩合

⑥
括
大率
八
名極

⑦
極外
八
大径

⑧
二外
二小
八
玄
三大率
八
丑
大小商
八
寅

置丑寅和巾加小半巾寄左與弦冪相消

⑨
大小
三 大小商 率大商
九 大率巾 巾
四 外巾
四 外小
矩合

変率

⑩
大小
大率 大小商 大商
九 大率巾 巾
四 外巾
二 外小
矩合

遍一十二之変率（12を掛ける）

③ $D-\frac{d_2}{2}-\sqrt{0.75}d_2=D-\frac{d_2}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}d_2=$子

④ $\frac{D}{2}-\frac{2}{3}d_2\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{d_2}{2}=0$

⑤ $D-\frac{2d_2}{\sqrt{3}}-d_2=0$

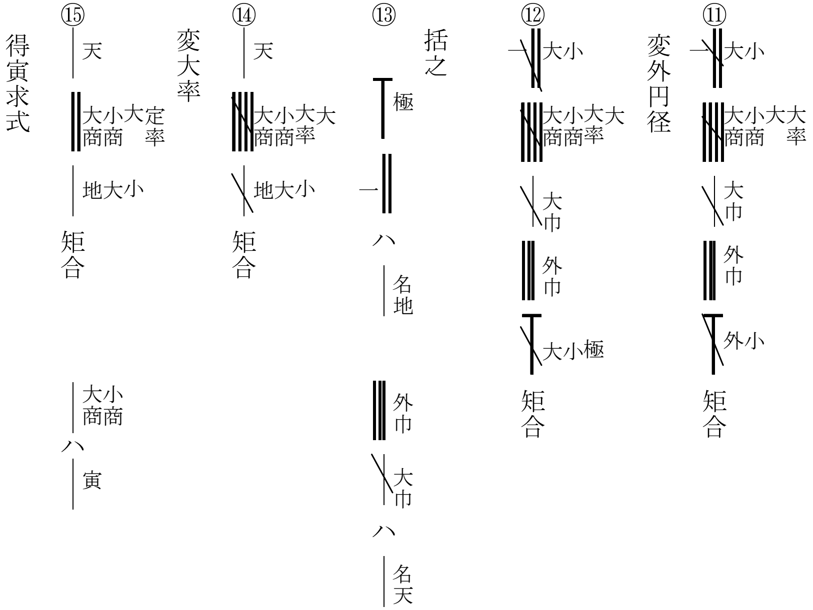
⑥ $\frac{2}{\sqrt{3}}+1=$極

⑦ $\frac{\sqrt{3}D}{2+\sqrt{3}}=\left(2\sqrt{3}-3\right)D=d_2$

⑧ $\frac{D}{2}-\frac{d_3}{2}=$玄、$\frac{d_2\sqrt{0.75}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}d_2=$丑、$\sqrt{d_2}\sqrt{d_3}=\sqrt{d_2 d_3}=$寅

⑨ $-d_2d_3-\frac{2}{3}\sqrt{d_2d_3}\frac{\sqrt{3}}{2}d_2-\frac{d_2^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9}+\frac{D^2}{4}-\frac{2Dd_3}{4}=0$

⑩ $-d_2d_3-\frac{\sqrt{d_2d_3}\,d_2}{\sqrt{3}}-\frac{d_2^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9}+\frac{D^2}{4}-\frac{Dd_3}{2}=0$



⑪ $-12d_2d_3-4\sqrt{d_2d_3}\,d_2\sqrt{3}-d_2^2+3D^2-6Dd_3=0$

⑫ $-12d_2d_3-4\sqrt{3}\sqrt{d_2d_3}\,d_2-d_2^2+3D^2-6d_2d_3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)=0$

⑬ $6\cdot$極$+12=$地、$3D^2-d_2^2=$天

⑭ 天$-4\sqrt{d_2d_3}\sqrt{3}d_2-d_2d_3$地$=0$

⑮ 天$-2\sqrt{d_2d_3}\,d_2\sqrt{12}-d_2d_3$地$=0$

⑮ $\sqrt{d_2d_3}=$寅

⑯ 天
定大率
地
此商ハ 寅
（寅に関する二次方程式である）

實級乘地广級省地

⑰ 天地
定大率
此商ハ 寅地
（（寅地）に関する二次方程式である）

方半立負商開之

⑱ 天地
一 大巾
○
此商 寅地
定大率
乾式
（上段は二次方程式である）

實級天地相乘解之

⑲ 一 外極巾
三 外巾
大極巾
一 大巾
ハ 天地

實級大巾異減之解極変之

⑳ 一 外極巾
三 外巾
大外
實級

変乘極巾除極巾而変

21 一 大極巾再
三 大極巾巾
大極巾
實級

⑳ $18D^2$極$+36D^2-6d_2D=$実級

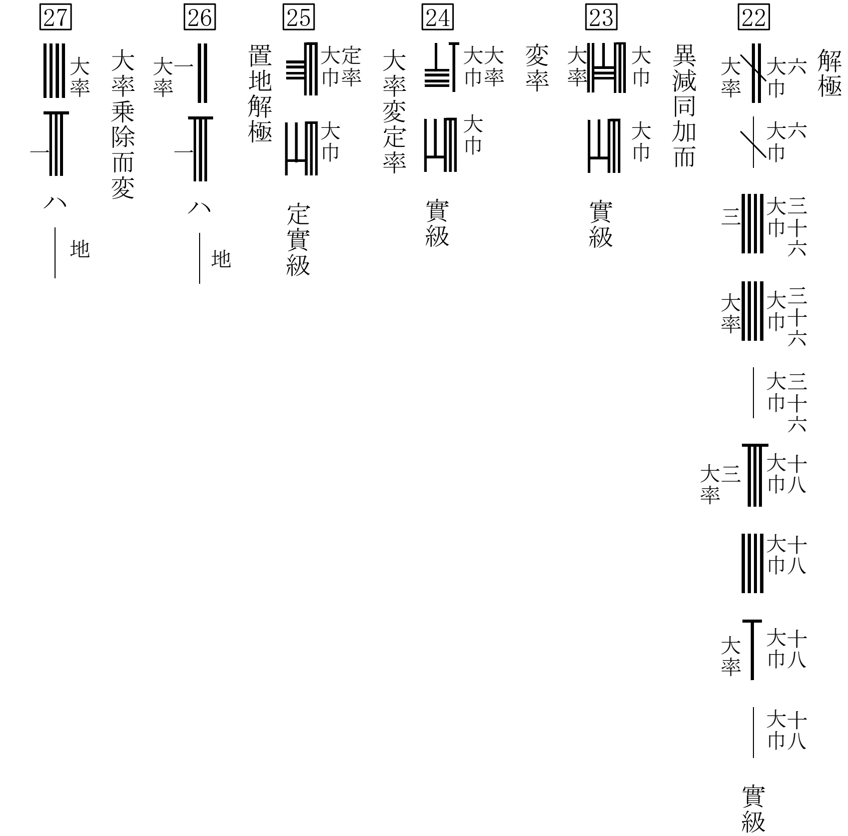
[21] $18d_2^2$極$^3+36d_2^2$極$^2-6d_2^2$極$=$実級

⑯ 天$-2\sqrt{12}\,d_2$寅$-$地$\cdot$寅$^2=0$

⑰ 天地$-2\sqrt{12}\,d_2$(寅地)$-$(寅地)$^2=0$

⑱ (天地$+12$大^2)$+0\cdot x-x^2=0$ 此商 寅地$-\sqrt{12}\,d_2$ 乾式

⑲ $18D^2$極$+36D^2-6d_2^2$極$-12d_2^2=$天地
検算 天地$=(6$極$+12)(3D^2-d_2^2)=18D^2$極$+36D^2-6d_2^2$極$-12d_2^2$



[22] $\dfrac{-2\cdot 6d_2^2}{\sqrt{3}}-6d_2^2+\dfrac{4\cdot 36d_2^2}{3}+\dfrac{4\cdot 36d_2^2}{\sqrt{3}}+36d_2^2+\dfrac{8\cdot 18d_2^2}{3\sqrt{3}}+4\cdot 18d_2^2+\dfrac{6\cdot 18d_2^2}{\sqrt{3}}+18d_2^2$ 実級

[23] $\dfrac{288d_2^2}{\sqrt{3}}+168d_2^2$ 実級

[24] $96\sqrt{3}\,d_2^2+168d_2^2$ 実級

[25] $48\sqrt{12}\,d_2^2+168d_2^2$ 定実級

[26] $\dfrac{12}{\sqrt{3}}+18=4\sqrt{3}+18=$ 地

[27] $4\sqrt{3}+18=$ 地

大率者変定率

[28]
定率
ハ　地

右立方半負商開所式変而定開式

[29]
定率 大巾　大巾
○
此商　小商大商　定率二段一十八箇和　大 定率
如此依是得小円径
（二次方程式であることに注意）

實級天地相乗解之

[30]
定率 等
ハ　外円径

[31]
外径
定率
得大円径定式

[30]　$3d_1\sqrt{12} = 6\sqrt{3}\,d_1 = D$

[31]　$D\left(-\dfrac{\sqrt{12}}{3} - 1\right) = d_2$

この式は誤りで、以下が正しい。

$D\left(\sqrt{12} - 3\right) = \left(2\sqrt{3} - 3\right)D = d_2$

[28]　$2\sqrt{12} + 18 = $ 地

[29]　$48\sqrt{12}\,d_2^2 + 168\,d_2^2 = 48\left(\sqrt{12} + 3.5\right)d_2^2 = x^2$

この商

$x = \sqrt{48\left(\sqrt{12} + 3.5\right)}\,d_2 = \left(2\sqrt{12} + 18\right)\sqrt{d_2}\sqrt{d_3} - \sqrt{12}d_2$　（誤）

$= \sqrt{48\left(\sqrt{12} + 3.5\right)}\,d_2 = \left(2\sqrt{12} + 18\right)\sqrt{d_2}\sqrt{d_3} + \sqrt{12}d_2$　（正）

この式から次式を得る。これは別術と同じである。

$\sqrt{d_3} = \dfrac{\sqrt{48\left(\sqrt{12} + 3.5\right)}\,d_2 - \sqrt{12}\,d_2}{\left(2\sqrt{12} + 18\right)\sqrt{d_2}} = \dfrac{H}{\sqrt{d_2}}$、　$d_3 = \dfrac{H^2}{d_2}$

但し　$H = \dfrac{\sqrt{48\left(\sqrt{12} + 3.5\right)}\,d_2 - \sqrt{12}d_2}{2\sqrt{12} + 18}$

付録２　於菊稲荷社と榛名神社の算額の解法（石井家文書Ｆより）

於菊稲荷社の算額の解法

① 二|乙　二|甲　ハ　|天

天自〆以減甲巾餘為高巾
（甲巾から天自を減じ餘は高巾と為す）

② 四|乙巾　二|甲乙　四|甲巾　|甲巾　ハ　|高巾

四乗除而異減

③ 四|乙巾　二|甲乙　四|甲巾　ハ　|高巾

依術求矩合

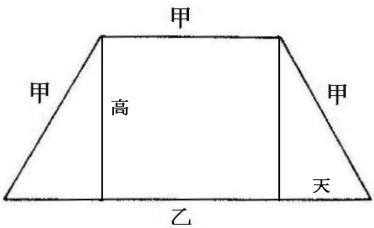
④ 二|甲高　二|乙高　|責　矩合

左右分之自之相消

⑤ 四|甲巾高巾　二|高巾甲乙　四|乙巾高巾　|責巾　矩合

解高巾異減而（⑤を③に代入）

（注）適尽方級法
適尽法は極大、極小を求める法で、
適尽方級法とは
$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n=0$ から
$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}=0$
を求め、これを解く方 法。



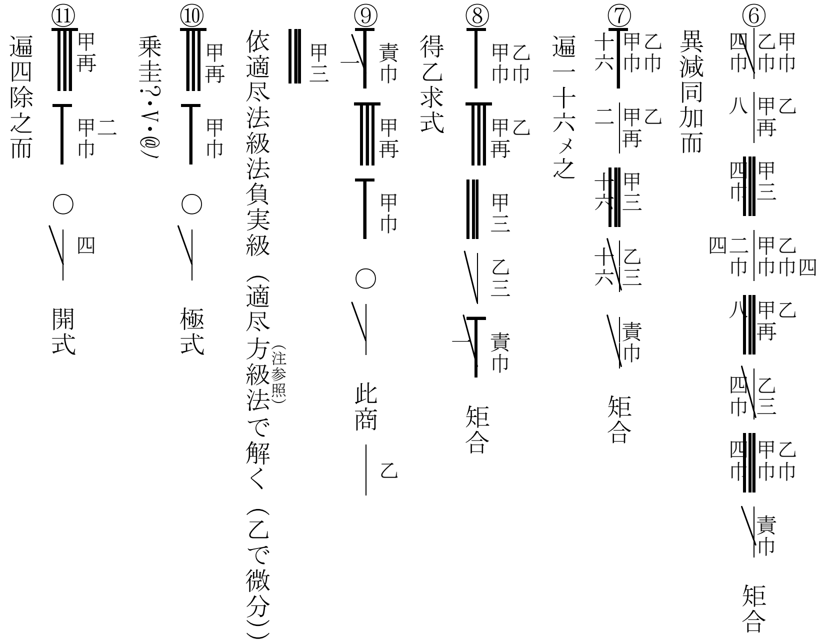
③ $-\dfrac{乙^2}{4}+\dfrac{甲乙}{2}+\dfrac{3甲^2}{4}=高^2$

④ $\dfrac{甲高}{2}+\dfrac{乙高}{2}-責=0$

① $\dfrac{乙}{2}-\dfrac{甲}{2}=天$

② $-\dfrac{乙^2}{4}+\dfrac{甲乙}{2}-\dfrac{甲^2}{4}+甲^2=高^2$

⑤ $\dfrac{甲^2高^2}{4}+\dfrac{高^2甲乙}{2}+\dfrac{乙^2高^2}{4}-責^2=0$



⑨ $\left(-16責^{2}+3甲^{4}\right)+8甲^{3}+6甲^{2}$ ○ -1 此商 乙
この式は以下の乙の４次方程式を意味する。
$$\left(-16責^{2}+3甲^{4}\right)+8甲^{3}(乙)+6甲^{2}(乙^{2})+0(乙^{3})-1(乙^{4})=0$$

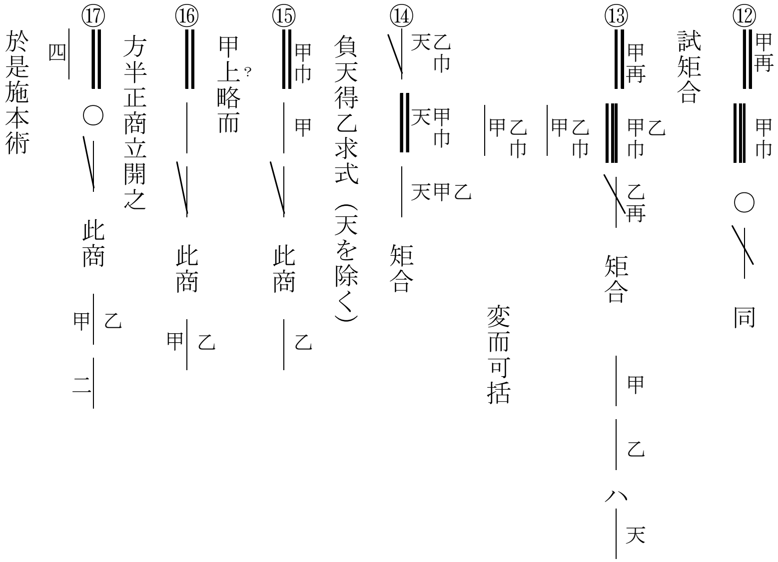
⑩ $8甲^{3}+6甲^{2}$ ○ -1 極式

⑪ $8甲^{3}+12甲^{2}$ ○ -4 開式、つまり
$$8甲^{3}+12甲^{2}(乙)+0(乙^{2})-4(乙^{3})=0$$

⑥ $$-\frac{乙^{2}甲^{2}}{4^{2}}+\frac{甲^{3}乙}{8}+\frac{3甲^{4}}{4^{2}}+\frac{4甲^{2}乙^{2}}{4\cdot 2^{2}}+\frac{3甲^{3}乙}{8}-\frac{乙^{4}}{4^{2}}+\frac{3甲^{2}乙^{2}}{4^{2}}-責^{2}=0$$

⑦ $$\frac{6甲^{2}乙^{2}}{16}+\frac{甲^{3}乙}{2}+\frac{3甲^{4}}{16}-\frac{乙^{4}}{16}-責^{2}=0$$

⑧ $$6甲^{2}乙^{2}+8甲^{3}乙+3甲^{4}-乙^{4}-16責^{2}=0$$



⑮ $2甲^2+甲-1$　此商　乙
つまり　$2甲^2+甲乙-乙^2=0$

⑫　$2甲^3+3甲^2$　○　-1　同、つまり
$2甲^3+3甲^2(乙)-1(乙^3)=0$

⑬ $2甲^3+3甲^2乙-乙^3=0$　$甲+乙=天$

⑭ $-天乙^2+2天甲^2+天甲乙=0$

⑯ $2+1-1$　此商　$\frac{乙}{甲}$　つまり
$2+\frac{乙}{甲}-\left(\frac{乙}{甲}\right)^2=0$　従って$乙=2甲$

⑰ $\left(2+\frac{1}{4}\right)-x^2$　此商　$\frac{乙}{甲}+\frac{1}{2}$　$\left(\frac{乙}{甲}-\frac{1}{2}が正しい？\right)$
$\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{乙}{甲}-\frac{1}{2}\right)^2$　従って$乙=2甲$

榛名神社の算額の解法

① 四|大巾　ハ　|乙巾　故　二|大　ハ　乙

② 四|大　ハ　小径　二|大　八|大　ハ　甲

変之

③ 八‖大　ハ　甲

④ 甲|小二 ✕ 乙|丙　故　甲十六|大巾　ハ　丙

置丙大和以長相消

⑤ 甲十六|大巾　|大　|長　矩合

変乗甲解甲（甲を掛ける）

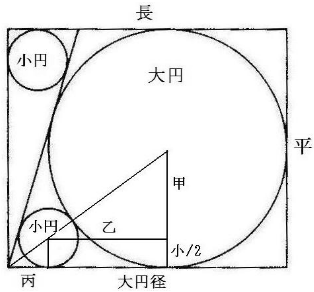
⑥ 十六|大　八‖大　八‖長　矩合

変乗一十六同加得大求式

⑦ 長‖　此商　|大

於是施本術

ここから始まるのは少々疑問



④ $甲\times丙=\dfrac{小}{2}\times乙$　故　$\dfrac{d_1^2}{16甲}=丙$

⑤ $\dfrac{d_1^2}{16甲}+d_1-長=0$

⑥ $\dfrac{d_1}{16}+\dfrac{3d_1}{8}-\dfrac{3長}{8}=0$

⑦ $-6長+7$　　此商　d_1

⑥から、$7d_1-6長=0$

$長=7$ だから　$d_1=6$

大円、小円の径を d_1、d_2 とすると、

① $\dfrac{d_1^2}{4}=乙^2$　故　$\dfrac{d_1}{2}=乙$

② $\dfrac{d_1}{4}=d_2$　$\dfrac{d_1}{2}-\dfrac{d_1}{8}=甲$

③ $\dfrac{3d_1}{8}=甲$

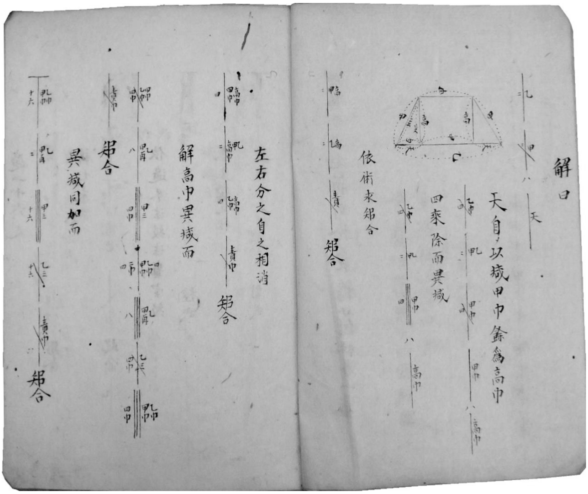


図１　於菊稲荷社の問題の記述部分

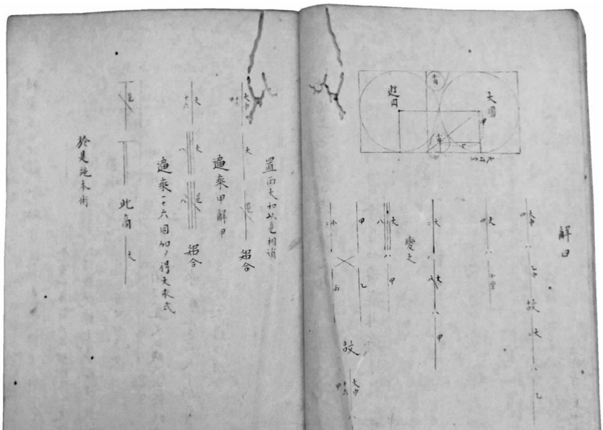


図２　榛名神社の問題の記述部分

付録３　円理関係の解読（石井家文書Ｈより）

円理関係ではまず、円に内接する矩形を作り、これらの和として円の面積や円周を求めている。つまり極限の概念と積分の概念に通じるもので、安島直円が求めた方法と同じである。

まず十等分（図１）して各玄の長さを次のように求める。（式１）

玄
五段
ハ
名天

径巾　天一段巾　ハ　甲線巾

径巾　天二段巾　ハ　乙線巾

径巾　天三段巾　ハ　丙線巾

（式１）

これを綴術で平方を開き天を乗じて矩形の面積を求めている。

つまり、$\sqrt{a^2-b}$ の形の二項級数展開を使っている。甲責について示せば次のようになる。（式２）

天
経

天
二経　天一段巾

天
四二経再　天一段三

天
二四二経四　天一段五

五天
八二四二経六　天一段七

七天
二八二四二経八　天一段九

二十一天
四二八二四二経十　天一段十一

甲責

（式２）

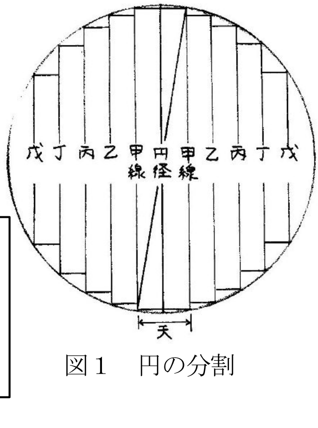


図１　円の分割

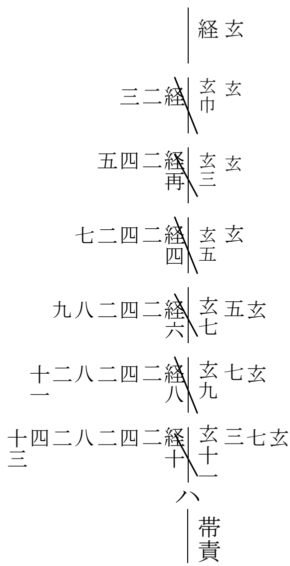
（式１）

径$=d$、玄$=a$ とすれば、天$=h=a/5$、

甲線$=b_1$、乙線$=b_2$、丙線$=b_3$ …として

$d^2-\left(a/5\right)^2=b_1^2$、$d^2-\left(2a/5\right)^2=b_2^2$、$d^2-\left(3a/5\right)^2=b_3^2$ …

次に、甲責と同じように乙責・丙責・・・を求め、これらの総和としての帯責を求めている。それは次のように書かれている。この級数は安島直円が求めたものと一致する。（式３）



（式３）

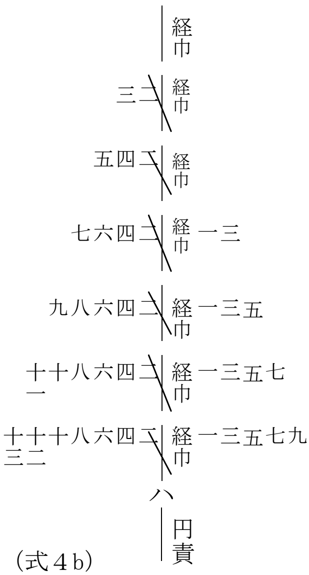
この帯責に対して、玄を経に置き換え次の円責を求めている。（式４ａはさらに式４ｂに変換されている）。

（式２）

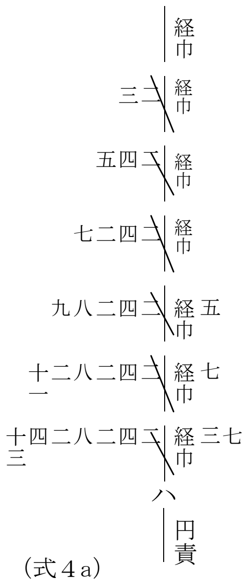
$$甲責 = h\left(d - \frac{h^2}{2\cdot d} - \frac{h^4}{2\cdot 4\cdot d^3} - \frac{h^6}{2\cdot 4\cdot 2\cdot d^5} - \frac{5\cdot h^8}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot d^7} - \frac{7\cdot h^{10}}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot d^9} - \frac{21\cdot h^{12}}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 4\cdot d^{11}} \cdots\right)$$

$$= hd\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{d^2}\right) - \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{h^2}{d^2}\right)^2 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{h^2}{d^2}\right)^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{h^2}{d^2}\right)^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\left(\frac{h^2}{d^2}\right)^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\left(\frac{h^2}{d^2}\right)^6 \cdots\right\}$$

（注）和算の累乗の、巾は２乗、再は３乗、三は４乗、四は５乗を意味している。



（式４b）



（式４a）

（式３）

$$帯責 = a\,d - \frac{a^2 \cdot a}{2\cdot 3\cdot d} - \frac{a^4 \cdot a}{2\cdot 4\cdot 5\cdot d^3} - \frac{a^6 \cdot a}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot d^5} - \frac{5\cdot a^8 \cdot a}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 9\cdot d^7}$$

$$- \frac{7\cdot a^{10} \cdot a}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 11\cdot d^9} - \frac{3\cdot 7\cdot a^{12} \cdot a}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 4\cdot 13\cdot d^{11}} \cdots$$

$$= a\,d - \frac{da^3}{6d^2} - \frac{da^5}{40d^4} - \frac{3da^7}{336d^6} - \frac{15da^9}{3456d^8} - \frac{105da^{11}}{42240d^{10}} - \frac{945da^{13}}{599040d^{12}} \cdots$$

（安島直円が求めた式に一致）

（式４）

$$円責 = d^2 - \frac{d^2}{2\cdot 3} - \frac{d^2}{2\cdot 4\cdot 5} - \frac{d^2}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 7} - \frac{5d^2}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 9} - \frac{7d^2}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 11} - \frac{3\cdot 7d^2}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 4\cdot 13} \cdots$$

$$= d^2\left(1 - \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 11} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 13} \cdots\right)$$

$$= d^2\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{3}{336} - \frac{15}{3456} - \frac{105}{42240} - \frac{945}{599040} \cdots\right)$$

これをさらに一差、二差、三差・・・の形式に直して次のように変形している。（式５）

差		乗数	前項	除数
減数	←		経巾	
一差	←	一	原数	二 三
二差	←	三	一差	四 五
三差	←	五 三	二差	六 七
四差	←	七 五	三差	八 九
五差	←	九 七	四差	十 十一
六差	←	十一 九	五差	十二 十三

円責

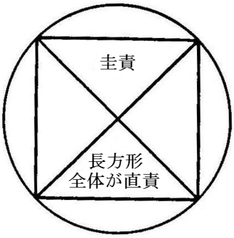
（式５）

（式５）

$$円責 = d^{2} - \left(\frac{原数\cdot 1}{2\cdot 3} + \frac{一差\cdot 3}{4\cdot 5} + \frac{二差\cdot 3\cdot 5}{6\cdot 7} + \frac{三差\cdot 5\cdot 7}{8\cdot 9} + \frac{四差\cdot 7\cdot 9}{10\cdot 11} + \frac{五差\cdot 9\cdot 10}{12\cdot 13}\right)\cdots$$

原数　一差　二差　三差　四差　五差　六差

次に、弧背（円弧）の長さを求めている。まず、帯責から直責を引きその半分の弧責を求めている。弧責と直責の４分の１の和は、半径と弧背を掛けた半分に等しいから、これから弧背を求めていて、次のように書かれている。（式６）



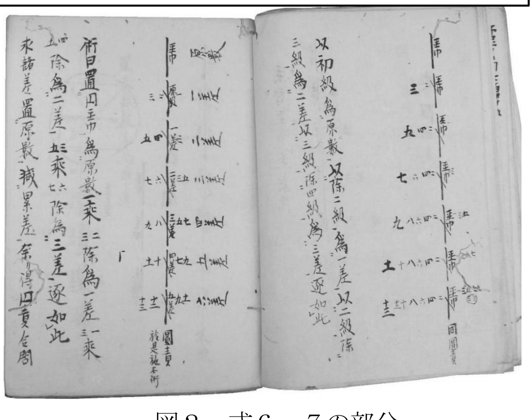


図２　式６、７の部分

（式６）

｜玄
三二経巾｜玄再　一
五四二経三｜玄四　三
三七二四二経五｜玄六　五三
九八二四二経七｜玄八　五七
五十一二八二四二経九｜玄十　七九五
三十三四二八二四二経十一｜玄十二　三七十一三
弧背

最後に円周率を求めている。次のようにある。（式７）

求円周解

置㆓定円責㆒四之除円径得円周

（式７）

三　円径｜
一巾　原｜四　六
三巾　一差｜八　十
五巾　二差｜十二　十四
七巾　三差｜十六　十八
九巾　四差｜廿〇　廿二
十一巾　五差｜廿四　廿六

術曰置㆓三箇ノ円径㆒為原数乗㆓一巾㆒
四六除為㆓一差㆒乗三巾八一十〇除為二差

（式６）

$$弧背 = a + \frac{a^3}{2\cdot 3d^2} + \frac{3a^5}{2\cdot 4\cdot 5d^4} + \frac{3\cdot 5a^7}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 3d^6} + \frac{5\cdot 7a^9}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 9d^8} + \frac{7\cdot 9\cdot 5a^{11}}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 11\cdot 5d^{10}} + \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot 3a^{13}}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 2\cdot 4\cdot 13\cdot 3d^{12}}\cdots$$

$$= a + \frac{a^3}{6d^2} + \frac{3a^5}{40d^4} + \frac{5a^7}{112d^6} + \frac{7\cdot 5a^9}{1152d^8} + \frac{9\cdot 7a^{11}}{2816d^{10}} + \frac{21\cdot 11a^{13}}{13312d^{12}}\cdots$$

この式をさらに展開すれば次のようになる。

$$弧背 = a + \frac{1^2 a^3}{3!} + \frac{1^2\cdot 3^2 a^5}{5!} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2 a^7}{7!} + \cdots$$

（式７）

$$円周率 = 3d + \frac{原数\cdot 1^2}{4\cdot 6} + \frac{一差\cdot 3^2}{8\cdot 10} + \frac{二差\cdot 5^2}{12\cdot 14} + \frac{三差\cdot 7^2}{16\cdot 18} + \frac{四差\cdot 9^2}{20\cdot 22} + \frac{五差\cdot 11^2}{24\cdot 26} + \cdots$$

乗㆓五巾㆒一十二 一十四 除為㆓三差㆒逐如㆑此求㆒差

置㆓原数㆒加㆓諸差㆒得㆓円周㆒合㆑問

これにより、円周率を、3.1415926百奇（有）として、石井和儀は小数点以下七桁まで正しく求めていた。

図３　円周率を求めている個所

付録４　　子の権現の算額の和算による解法

１．はじめに

子の権現の算額の問題が和算でどのように解かれたかを知るために、「算法雑俎解」(梅村重得訂、明治３年) [(1)]に掲載されているものを解読する。文字が滲んでいて判然としない部分もあるが前後関係からほぼ解読できる。

梅村重得(しげよし)(1804−1884)は陸奥盛岡藩士で代官、物頭もつとめた和算家であった。江戸で藤田嘉言(よしとき)(定資の子)や長谷川弘らに和算を学んでいる。著書に「傍斜捷解」他がある。子の権現の算額の掲額者である石井弥四郎和義と生まれは同年である。

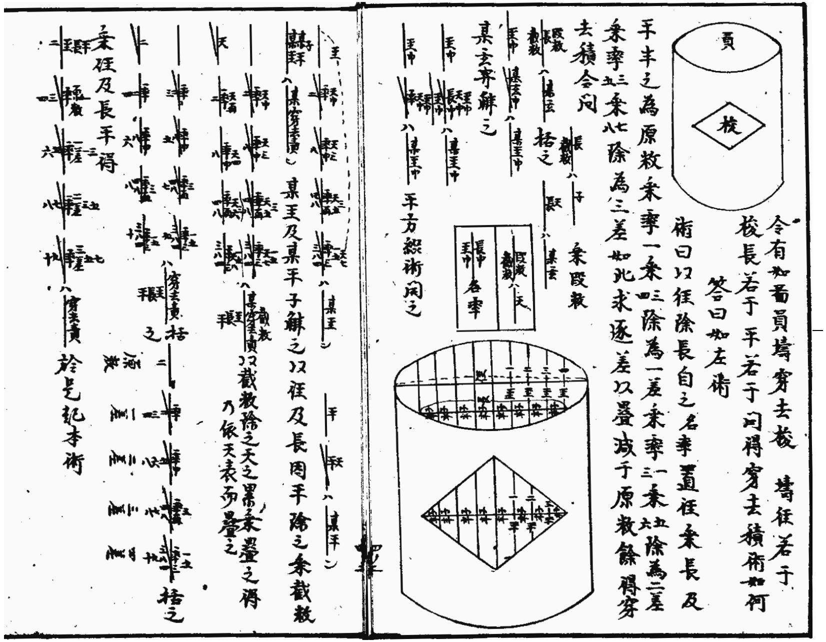


図１．「算法雑俎解」の子の権現の問題の解法部分
（東北大学和算ポータルサイトより）

２．子の権現の算額の問題

子の権現の算額の問題は、円柱を菱形の角柱で穿ち去ったときの体積を求めるもので、その解は次のように記述されている。

今、図２のように円柱の直径をd_1、梭の長をd_2、平をd_3

としたとき、率 $k=\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2$ 、原数 $=d_1\,d_2\,\dfrac{d_3}{2}$

一差 $=$ (原数) $\times k\times\dfrac{1}{3\cdot 4}$ 、二差 $=$ (一差) $\times k\times\dfrac{1\cdot 3}{5\cdot 6}$、三差 $=$ (二差) $\times k\times\dfrac{3\cdot 5}{7\cdot 8}$、・・・・

求める体積 V は、

$V=$ (原数) －(一差＋二差＋三差＋・・・・・)

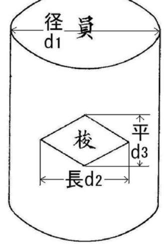


図２

３．前提知識（和算における積分小史）

解読に当り、和算の発達における以下の事項を前提とする。

和算史上の四天王は、関孝和・松永良弼・安島直円・和田寧と言われる。

(1) 松永良弼（1692？～1744）は、「算法綴術草」の中で $\sqrt{1-x}$ などについて２項級数の展開式を得ている。[(2)]

(2) 安島直円（1732～1798）は、建部賢弘や松永良弼以来の円理の問題を改良して、積分の概念を導入している。直円は円の直径を等分して円に内接する矩形を作り、これらの和として円の面積を求め、しかるのちに円周を求めた。[(3)] この問題は円理二次綴術といわれ、成功したのは２項級数の展開を利用したことによる。直円はこの考えを利用して、円柱穿空円術の解に成功し、「不朽算法」の中で円柱を他の円柱で貫通した部分の体積や表面積を求めている。

(3) 和田寧（1787～1840）は、円理の完成者といわれる。和算の最後の花を咲かせた人ともいわれる。直円の円理二次綴術は和田寧の円理豁術となって西洋の積分に匹敵されるようになった。

寧は定積分に相当する円理諸表を作成している。それは八態表・八象表（累乗などの展開式）や九成艸表・九成眞表・六龍三陽表などの積分表（様々な式に対応している）である。

４．梅村重得の解法

【添付資料】に梅村重得の解法を示し、以下その○番号に沿って解読する。

図２の他に、截数をn、段数（n 等分した端からの順番）をr とする。

①② $\dfrac{r}{n}=$天， $\dfrac{d_2^2}{d_1^2}=\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2=$率$=k$ を定義する。

③ $\dfrac{d_2}{n}=$子 を定義し、段数を掛ける。

④ $\dfrac{d_2 r}{n}$ は某玄である。 これを括り、長・天＝某玄である。

⑤ 径$^2-($某玄$)^2=d_1^2-\left(\dfrac{d_2 r}{n}\right)^2$ は$($某径$)^2$である。（図３）

⑥ 某玄を寄せこれを解く

⑦ $d_1^2-\dfrac{d_2^2\left(\frac{r}{n}\right)^2 d_1^2}{d_1^2}=d_1^2-d_2^2\left(\dfrac{r}{n}\right)^2=($某径$)^2$である。

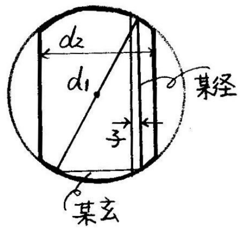


図３．上面図

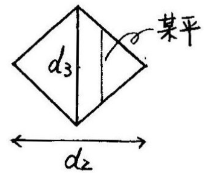


図４．側面図

⑧　$d_1^2-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\left(\frac{r}{n}\right)^2 d_1^2=(某径)^2$である。綴術で平方を開く。つまり某径を級数展開で求める。

つまり、　某径$=\sqrt{d_1^2-k\left(\frac{r}{n}\right)^2 d_1^2}=d_1\sqrt{1-k\left(\frac{r}{n}\right)^2}$ を求めている。

ここで次の展開式を使う。　$\sqrt{1-y}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!\,y^n}{n!\,2^n}$　ただし、$(-1)!!=0!!=1$

⑨　$d_1\left\{1-\frac{k}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2-\frac{k^2}{8}\left(\frac{r}{n}\right)^4-\frac{3k^3}{48}\left(\frac{r}{n}\right)^6-\frac{15k^4}{384}\left(\frac{r}{n}\right)^8\cdots\cdots\right\}$ は某径である。（…は原文になし、以下同様）

（注）和算の累乗は、巾は二乗、再は三乗、三は四乗、四は五乗、五は六乗・・・を示す。

また、$d_3-d_3\cdot\frac{r}{n}=d_3\left(1-\frac{r}{n}\right)=(某平)$ である。（図４）

⑩　（某径×某平×子）は、某穿去積である。つまり、部分体積である。

$$子\times某平\times某径=\frac{d_1d_2d_3}{n}\left(1-\frac{r}{n}\right)\left\{1-\frac{k}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2-\frac{k^2}{8}\left(\frac{r}{n}\right)^4-\frac{3k^3}{48}\left(\frac{r}{n}\right)^6-\frac{15k^4}{384}\left(\frac{r}{n}\right)^8\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{n}\left\{1-\frac{k}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2-\frac{k^2}{8}\left(\frac{r}{n}\right)^4-\frac{3k^3}{48}\left(\frac{r}{n}\right)^6-\frac{15k^4}{384}\left(\frac{r}{n}\right)^8\cdots\cdots\right\}$$

$$+\frac{d_1d_2d_3}{n}\left\{-\frac{r}{n}+\frac{k}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^3+\frac{k^2}{8}\left(\frac{r}{n}\right)^5+\frac{3k^3}{48}\left(\frac{r}{n}\right)^7+\frac{15k^4}{384}\left(\frac{r}{n}\right)^9\cdots\cdots\right\}$$

某径某平子を解き、径、長、平で除し、截数を乗ずる。

⑪ $$\left\{1-\frac{k}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^2-\frac{k^2}{8}\left(\frac{r}{n}\right)^4-\frac{3k^3}{48}\left(\frac{r}{n}\right)^6-\frac{15k^4}{384}\left(\frac{r}{n}\right)^8\right\}$$

⑫ $$\left\{-\frac{r}{n}+\frac{k}{2}\left(\frac{r}{n}\right)^3+\frac{k^2}{8}\left(\frac{r}{n}\right)^5+\frac{3k^3}{48}\left(\frac{r}{n}\right)^7+\frac{15k^4}{384}\left(\frac{r}{n}\right)^9\right\}$$

⑬ ⑪＋⑫は $\dfrac{\text{某穿去責}\times n}{d_1 d_2 d_3}$ である。

截数で之を除し、天の累乗で之を畳み、すなわち天表に依って得而して之を畳む。

つまり、⑪を項別積分して⑭を得る。同様に⑫を項別積分して⑮を得る。

ここで、畳元表を使う。畳元表は和田寧が作成したもので、様々な積分表が用意されており、

$\int x^m dx=\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}$ もその中の一つである。

$\dfrac{r}{n}=x$ として⑪、⑫を項別積分して⑭、⑮を得る。

$$\int_0^1\left(1-\frac{k}{2}x^2-\frac{k^2}{8}x^4-\frac{3k^3}{48}x^6-\frac{15k^4}{384}x^8\right)dx=1-\frac{k}{2}\frac{1}{3}-\frac{k^2}{8}\frac{1}{5}-\frac{3k^3}{48}\frac{1}{7}-\frac{15k^4}{384}\frac{1}{9}$$

$$\int_0^1\left(-x+\frac{k}{2}x^3+\frac{k^2}{8}x^5+\frac{3k^3}{48}x^7+\frac{15k^4}{384}x^9\right)dx=-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}\frac{1}{4}+\frac{k^2}{8}\frac{1}{6}+\frac{3k^3}{48}\frac{1}{8}-\frac{15k^4}{384}\frac{1}{10}$$

⑭　$1-\dfrac{k}{3\cdot 2}-\dfrac{k^2}{5\cdot 8}-\dfrac{3k^3}{7\cdot 48}-\dfrac{15k^4}{9\cdot 384}$

⑮　$-2+\dfrac{k}{4\cdot 2}+\dfrac{k^2}{6\cdot 8}+\dfrac{3k^3}{8\cdot 48}+\dfrac{15k^4}{10\cdot 384}$　（-2 は間違いで、$-\dfrac{1}{2}$ が正しいと思われる）

⑭＋⑮は、$\dfrac{\text{穿去責}}{d_1 d_2 d_3}$ である。これを括り次を得る。

⑭＋⑮の第１項～第５項は k を除いて次のように計算でき、⑯を得る。

$1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$、$-\dfrac{1}{3\cdot 2}+\dfrac{1}{4\cdot 2}=-\dfrac{1}{2(3\cdot 4)}$、$-\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{6\cdot 8}=-\dfrac{1}{8(5\cdot 6)}$、

$-\dfrac{3}{7\cdot 48}+\dfrac{3}{8\cdot 48}=-\dfrac{3}{48(7\cdot 8)}$、$-\dfrac{15}{9\cdot 384}+\dfrac{15}{10\cdot 384}=-\dfrac{15}{384(9\cdot 10)}$

⑯　$\underbrace{\dfrac{1}{2}}_{\boxed{\text{原数}}}-\underbrace{\dfrac{k}{2\cdot 3\cdot 4}}_{\boxed{\text{一差}}}-\underbrace{\dfrac{k^2}{8\cdot 5\cdot 6}}_{\boxed{\text{二差}}}-\underbrace{\dfrac{3k^3}{48\cdot 7\cdot 8}}_{\boxed{\text{三差}}}-\underbrace{\dfrac{15k^4}{384\cdot 9\cdot 10}}_{\boxed{\text{四差}}}$　これを括り

⑰　径、長、平　を乗じて次を得る。

⑱　$\dfrac{d_1 d_2 d_3}{2}-\dfrac{k(\text{原数})}{3\cdot 4}-\dfrac{k(\text{一差})1\cdot 3}{5\cdot 6}-\dfrac{k(\text{二差})3\cdot 5}{7\cdot 8}-\dfrac{k(\text{三差})5\cdot 7}{9\cdot 10}$ は穿去積である。

５．まとめ

上記のことは、現代数学でいえば、$(r/n)=x,\ (1/n)=dx$ として次式で示されるものである。

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}(\text{子}\times\text{某平}\times\text{某径})=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{d_2}{n}\cdot d_3\left(1-\frac{r}{n}\right)d_1\sqrt{1-k\left(\frac{r}{n}\right)^2}$$

$$=d_1d_2d_3\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1-\frac{r}{n}\right)\sqrt{1-k\left(\frac{r}{n}\right)^2}=d_1d_2d_3\int_0^1(1-x)\sqrt{1-kx^2}\,dx$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}-\frac{(\text{原数})k}{3\cdot 4}-\frac{(\text{一差})k\cdot 1\cdot 3}{5\cdot 6}-\frac{(\text{原数})k\cdot 3\cdot 5}{7\cdot 8}-\cdots\cdots$$

ここでは、積分の正しい考え方が使われている。解き方は級数展開した上で項別積分ができるようにし、その上で積分表を利用している。こういった解き方が当時の「高級」な和算を習った者には一般化していたのであろう。梅村重得と石井弥四郎和義は全くの同年代の人である。恐らく石井弥四郎和義の解き方も上記のようなものであったと思われる。

なお、石井弥四郎和義が子の権現に掲額した文政 13 年(1830)は、和義 25 歳のときである。

参考文献

(1)「算法雑組解」(梅村重得訂、明治３年)　東北大学和算ポータルサイト
(2)「明治前日本数学史（第２、４、５巻)」　岩波書店　1959 年初版
(3)「和算の歴史　その本質と発展」平山諦　ちくま学芸文庫　2007 年（原本は 1961 年至文堂より刊行)

【添付資料】「算法雑組解」の子の権現の算額の解法（原文は、東北大学和算ポータルサイトより）

③ 長截数ハ　子　乗段数

④ 段数長截数ハ　某玄　括之　天長ハ　某玄

① 段数截数ハ　天

⑤ 径巾ハ　某玄巾ハ　某径巾

⑥ 某玄寄解之

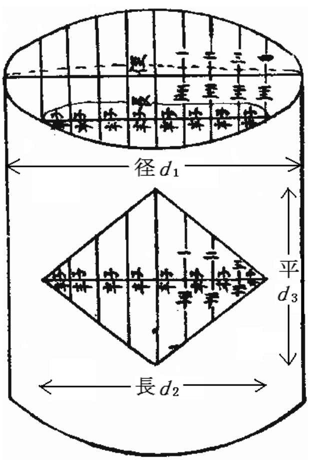
② 長巾径巾　名率

⑦ 径巾　径巾天巾長巾径巾ハ　某径巾

⑧ 径巾　径巾天巾率ハ　某径巾　平方綴術開之

⑨ 径　天巾率二　天三巾率八　天五率再四八　天七率三一五三八四ハ　某径ン

平　平天ハ　某平ン



⑩ 某平子 某径 ハ 某穿去責 ン 某径及某平子解之以径及長因平除之乗截数

⑪
天巾 率 二
天三 率巾 八
三 天五 率再 四八
一五 天七 率三 三八四

⑫
天
天再 率 二
天四 率巾 八
三 天六 率再 四八
一五 天八 率三 三八四

⑬ ハ 截数 某穿去責 平長径
□截数除之天之累乗畳之得
乃依天表而畳之

⑭
率 三二
率巾 五八
三 率再 七四八
一五 率三 九三八四
ハ 穿去責 径 平長
括之

⑯
二
率 四三二
率巾 八六五
三 率再 八七四八
一五 率三 十九三八四
括之

⑮
二
率 四二
率巾 六八
三 率再 八四八
一五 率三 十三八四

原数
一差
二差
三差
四差

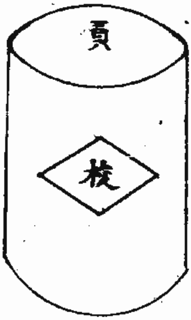
⑰ 乗径及長平得

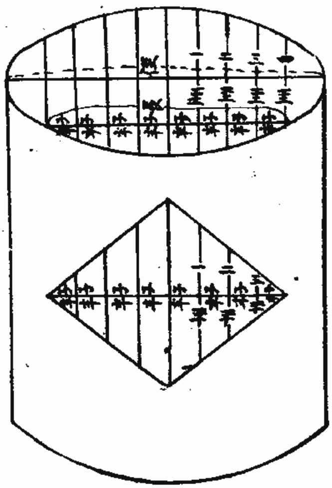
⑱
平長径 二
原数 率 四三
三一 一差 率 六五
五三 二差 率 八七
七五 三差 率 十九
ハ 穿去責
於是起本術

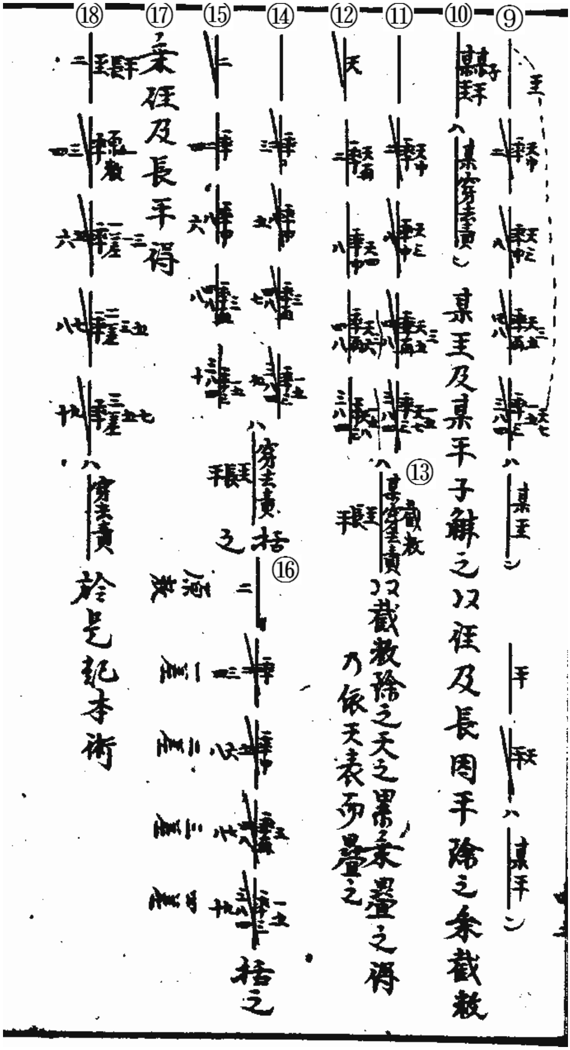
（注）⑮の 二 は 二 が正しいと思われる。

原文

今有如畜員墻穿去棱　墻徑若干
棱長若干 平若干 問得穿去積術如何
答曰如左術
術曰以徑除長自之名率 置徑乘長及
平半之為原積乘率一乘四三除為一差乘率一三乘五六除為二差
乘率三五乘七八除為三差 如此求逐差以疊減于原積餘 得穿
去積合問





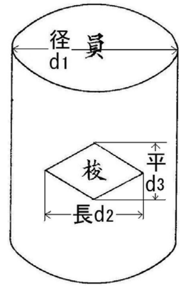


某王及某平子餘之以徑及長因平除之余截積
以截積除之天之冪以某疊之得
乃依天表而疊之
括之
余徑及長平得
於是乾本術

付録５　　子の権現の算額の問題の現代解法

※　以下は川田義広氏に解いていただいたものです。

１．子の権現の算額の問題



子の権現の算額の問題は、円柱を菱形の角柱で穿ち去ったときの体積を求めるもので、その解は次のように記述されている。

今、右図のように円柱の直径をd_1、梭の長をd_2、平をd_3

としたとき、率 $k=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$、原数$=d_1\,d_2\frac{d_3}{2}$

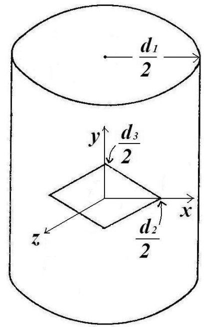
一差$=(原数)\times k\times\frac{1}{3\cdot 4}$、二差$=(一差)\times k\times\frac{1\cdot 3}{5\cdot 6}$、三差$=(二差)\times k\times\frac{3\cdot 5}{7\cdot 8}$、・・・・

求める体積 V は、

$V=(原数)-(一差＋二差＋三差＋\cdots\cdots)$　　…………(1)

以下、現代解法でこの問題を解く。

２．体積の求め方



図のように座標をとる。(x,z) 平面上では円柱の表面は次のような円である。

$$z^2+x^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \quad すなわち、z=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2-x^2} \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

z 座標が穿ち去った（くりぬいた）部分の高さになる。

底面は平 (x,y) 面上の菱形で、その 1/4 は、

$$x=0,\quad y=0,\quad y=\frac{1}{2}d_3-\frac{d_3}{d_2}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

で囲まれた部分であり、この三角形の部分の面積を S とする。

$x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ だから、積分範囲は 1/8で行うと、求める体積は、次のように表される。

$$V=8\iint_S\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2-x^2}\,dxdy=8\int_0^{\frac{d_2}{2}}dx\int_0^{\frac{d_3}{2}-\frac{d_3}{d_2}x}\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2-x^2}\,dy$$

$$=8\int_0^{\frac{d_2}{2}}dx\cdot\left(\frac{d_3}{2}-\frac{d_3}{d_2}x\right)\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2-x^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

３．定積分

(4)を置換積分で解く。

$x=\frac{d_1}{2}\sin\theta$ とおくと、$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d_1}{2}\cos\theta$ つまり、$dx=\frac{d_1}{2}\cos\theta d\theta$

また、$\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2-x^2}=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2-\left(\frac{d_1}{2}\right)^2\sin^2\theta}=\sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2(1-\sin^2\theta)}=\frac{d_1}{2}\cos\theta$

そして、$\sin\theta_1=\frac{d_2}{d_1}$ つまり、$\theta_1=\sin^{-1}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

とすると、(4) は次のようになる。

$$V=8\int_0^{\theta_1}\frac{d_1}{2}\cos\theta\cdot d\theta\left(\frac{d_3}{2}-\frac{d_1d_3}{2d_2}\sin\theta\right)\frac{d_1}{2}\cos\theta$$

$$=d_1^2d_3\int_0^{\theta_1}\left(1-\frac{d_1}{d_2}\sin\theta\right)\cos^2\theta\cdot d\theta$$

$$=d_1^2d_3\int_0^{\theta_1}\cos^2\theta\cdot d\theta-\frac{d_1^3d_3}{d_2}\int_0^{\theta_1}\sin\theta\cdot\cos^2\theta\cdot d\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

右辺第１項 $=d_1^2d_3\int_0^{\theta_1}\cos^2\theta\cdot d\theta=d_1^2d_3\int_0^{\theta_1}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$$=\frac{d_1^2d_3}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\theta_1}=\frac{d_1^2d_3}{2}\theta_1+\frac{d_1^2d_3}{4}\sin 2\theta_1$$

$$=\frac{d_1^2d_3}{2}\theta_1+\frac{d_1^2d_3}{2}\sin\theta_1\cos\theta_1$$

$$=\frac{d_1^2d_3}{2}\theta_1+\frac{d_1^2d_3}{2}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)\sqrt{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2}$$

$$=\frac{d_1^2d_3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)+\frac{d_1d_2d_3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

右辺第２項は置換積分　で解く。

$\cos\theta = t$ とおくと、 $dt = -\sin\theta d\theta$ 　つまり $d\theta = -\dfrac{1}{\sin\theta}dt$

また積分範囲は、 $\cos 0 = 1$ から $\cos\theta_1$ までに変わる。従って

$$\text{右辺第２項} = \frac{d_1^3 d_3}{d_2}\int_0^{\theta_1}\sin\theta\cdot\cos^2 d\theta = \frac{d_1^3 d_3}{d_2}\int_1^{\cos\theta_1} t^2(-dt)$$

$$= \frac{d_1^3 d_3}{d_2}\left[-\frac{t^3}{3}\right]_1^{\cos\theta_1} = \frac{d_1^3 d_3}{d_2}\frac{1}{3}\left(1-\cos^3\theta_1\right)$$

$$= \frac{d_1^3 d_3}{3d_2}\left[1-\left\{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

以上から、求める体積は次のようになり具体的な計算が可能となる。

$$V = \frac{d_1^2 d_3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{d_2}{d_1}\right) + \frac{d_1 d_2 d_3}{2}\left\{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{d_1^3 d_3}{3d_2}\left[1-\left\{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\right] \qquad \cdots\cdots(9)$$

４．級数展開

(9) を級数展開し、(1) に等しくなることを以下に示す。

(9)を見ると、 d_2/d_1 が1より小であるから、 $\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)$ あるいは、 $\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2$ で

級数展開するのが自然である。

ここで次の展開式を使う。

$$\sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots\cdots \times (2n-2) \times 2n \qquad \cdots\cdots \text{偶数のみの掛算}$$
$$= (2\times 1)(2\times 2)(2\times 3)\cdots\cdots(2\times n)$$
$$= 2^n \times (1\times 2\times 3\times \cdots \times n) = 2^n n!$$

$$(2n-1)!! = 1\times 3\times 5\times \cdots \times (2n-3)(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} \qquad \cdots \text{奇数のみの掛算}$$

ただし、 $(-1)!! = 0!! = 1$

また、 $|y| \le 1$ として

$$\sqrt{1-y} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!\, y^n}{n!\, 2^n}$$ であるから $x^2 \le 1$ として

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!\, x^{2n}}{n!\, 2^n}$$

$x = d_2/d_1$ として、これらを(9)に代入すると、求める体積は次のようになる。

$$V = \frac{d_1^2 d_3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{d_1 d_2 d_3}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!\, x^{2n}}{n!\, 2^n} \right\}$$
$$- \frac{d_1^3 d_3}{3 d_2} \left[1 - \left\{ 1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right\} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!\, x^{2n}}{n!\, 2^n} \right\} \right] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

次に、(1)を睨みながら、$x = d_2/d_1$ をうまく使い(10)を変形して行く。Σの初項値や指数が微妙に変化して行くのに注意が必要。

$$V=\frac{d_1d_2d_3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n}}{2n+1}+\frac{d_1d_2d_3}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!x^{2n}}{n!2^n}\right\}$$

$$-\frac{d_1d_2d_3}{3x^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!x^{2n}}{n!2^n}+x^2-x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!x^{2n}}{n!2^n}\right]\qquad\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n}}{2n+1}+\frac{d_1d_2d_3}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n}}{2n-1}\right\}$$

$$-\frac{d_1d_2d_3}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{n!2^n}x^{2(n-1)}+1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!x^{2n}}{n!2^n}\right]\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n}}{2n+1}\right\}+\frac{d_1d_2d_3}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n}}{2n-1}\right\}$$

$$-\frac{d_1d_2d_3}{3}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}}x^{2n}+1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n}}{2n-1}\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$=d_1d_2d_3+\frac{d_1d_2d_3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}$$

$$-\frac{d_1d_2d_3}{3}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{n+1}}x^{2n}+1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n}}{2n-1}\right\}\qquad\cdots\cdots(14)$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}+\frac{d_1d_2d_3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{(-2)}{(2n+1)(2n-1)}x^{2n}$$

$$-\frac{d_1d_2d_3}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\left\{\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2n-1}\right\}x^{2n}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}-d_1d_2d_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}x^{2n}$$

$$-\frac{d_1d_2d_3}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{(-3)}{2(n+1)(2n-1)}x^{2n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}-d_1d_2d_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)x^{2n}$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}-d_1d_2d_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)(2n+2)}$$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{2}-d_1d_2d_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(n+1)!2^{n+1}}\frac{x^{2n}}{2n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

ここで、$x^2=k$ とおけば、次の最終形が得られる。

$$V=\frac{d_1d_2d_3}{2}-\frac{d_1d_2d_3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(n+1)!2^n}\frac{k^n}{2n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots(18)$$

第 n 差 D_n は、次で示される。

$$D_n=\frac{d_1d_2d_3}{2}\frac{(2n-3)!!}{(n+1)!2^n}\frac{1}{2n+1}k^n \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

n 差の漸化式を求めるには、

$$D_{n+1} = \frac{d_1 d_2 d_3}{2} \frac{(2n-1)!!}{(n+2)!\,2^{n+1}} \frac{1}{2n+3} k^{n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

だから $$\frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{(2n-1)!!}{(n+2)!\,2^{n+1}} \frac{k^{n+1}}{2n+3} \times \frac{(n+1)!\,2^n}{(2n-3)!!} \times (2n+1) k^{-n}$$

$$= \frac{(2n-1)}{(n+2)\cdot 2} \frac{(2n+1)}{(2n+3)} k = \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+3)(2n+4)} k$$

従って、n 差の漸化式は次のようになる。

$$D_{n+1} = D_n \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+3)(2n+4)} k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

以上から、$d_1 d_2 d_3 /2 =$ 原数 だから、(1)に相当する式は(18)で、また n 差は(21)で示された。

５．簡単な検算

$d_1 d_2 d_3 / 2 = A$ とすれば(19)から

$$D_1 = A \frac{(-1)!!}{2!2^1\cdot 3} k^1 = A \frac{k}{3\cdot 4} \qquad D_2 = A \frac{1!!}{3!2^2\cdot 5} k^2 = A \frac{1}{4} \frac{1}{5\cdot 6} k^2 = A \frac{k}{3\cdot 4} \frac{3k}{5\cdot 6} = D_1 \frac{3k}{5\cdot 6}$$

$$D_3 = A \frac{3!!}{4!2^3\cdot 7} k^3 = A \frac{1\cdot 3k^3}{(2\cdot 3\cdot 4)8\cdot 7} = A \frac{k}{4} \frac{3k}{5\cdot 6} \frac{5k}{7\cdot 8} = A \frac{k}{3\cdot 4} \frac{3k}{5\cdot 6} \frac{3\cdot 5k}{7\cdot 8} = D_1 \frac{3k}{5\cdot 6} \frac{3\cdot 5k}{7\cdot 8} = D_2 \frac{3\cdot 5k}{7\cdot 8}$$

（注）現代解法では、積分を先に行いその結果を級数展開しているのに対して、和算家の解法は、関数が級数展開された後にその項別積分を行っている。この方法は和算の解き方の特徴である。

付録６　慈光寺の算額

一、はじめに

比企郡ときがわ町西平の慈光寺は、天台宗の古刹として大般若経（慈光寺経）や寛元三年（一二四五）の銅鐘を有していることで有名だが、坂東三十三観音の九番目の札所でもある。ここの観音堂にはかつて算額が掲げられていた。算額とは数学の問題や解法を書いて寺社に奉納したものであるが、寺の人の話（平成二十一年五月）によれば、この算額は痛みがひどく文字も読めない状態であるという。そのため化学処理を行って宝物殿金蓮蔵に保存されているが公開はされていない。筆者はビニールで覆われた状態を拝見させて頂いたが無論中身は見ることができなかった。現在の観音堂（図１）は平成五年から四年かけて修復されているが、この修復以前に算額は既に外されていたようである。文献１には図２のように算額が掲げられている写真が載っているが、いつごろのことか不明である。

その文献１には慈光寺の算額について、「文政十三年九月、サイズ200×80、数３、出題者田中与八郎信直」とあり、また同文献の別の個所には、「文政十三年三月、出題者市川行英門人久田儀、引用文献算法雑俎」とある。文政十三年（一八三〇）九月と三月の違いは、「算法雑俎[6]」には確かに三月とあるが文献２及び

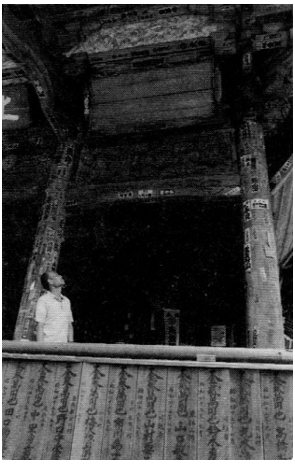


図２ かつての観音堂[1]

図１　修復された観音堂（平成21年5月）

４には実見として九月とある。これは算法雑組が現物を見て記録したのではなく、原稿をもとにしているからであろう。数３というのは三問という意味であろう。算法雑組に記載されている慈光寺の算額の出題者は、市川行英門下の田中與(与)八郎信直(道?)、馬場與(与)右衛門安信、久田善八郎儀知の三名で現在の小川町古寺・腰越の人達である。問題は三問掲げられている。この算額について文献１では三問とも簡単に解説しているが、原文にある術文（計算式）は省略されている。文献２は一問目のみを掲げて現代風に解いている。文献３は全文を掲げ、三問目のみを現代数学で解いている。文献４には出題者のことなどが述べられている。このように慈光寺の算額については過去に発表された資料があるので目新しいことではないが、これらの文献も引用させて頂きながら筆者なりに述べてみたい。

二、算額の内容

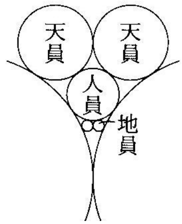
算法雑組は、関流の算士白石長忠（一七九五～一八六二）の門人岩井重遠（一八〇四～七八）が編集（市川行英訂・白石長忠閲）したもので、文政十三年三月の序文がある。主に群馬・長野・埼玉などの十九社寺・二十二面の算額を記録している。埼玉では飯能の子(ね)の権現、東松山の稲荷社（箭弓稲荷社）の算額も記載されている。この算法雑組は東北大学の和算ポータルサイトで見ることができる。掲載されている慈光寺観音堂の算額は図３のようなものであり、三問が記載されている。阪東九


所揭于阪東九番觀音堂者一事
今有如圖以等弧背拖五員天員徑六十八寸地員徑一十七寸問人員徑幾何
答曰人員徑六十四寸
術曰以地徑除天徑名極平方開之六之加極及一个以除天徑一十六之得人徑合問
今有如圖長立員穿去梭長徑若干短徑若干問得穿去積術如何
答曰如左術
術曰置三个一分二釐五毫平方開之内減一个餘乘長徑及短徑冪與球積率得穿去積合問
今有如圖削棲立員一十二角角背切立員周長徑若干短徑若干問得積術如何
答曰如左術
術曰置長徑自之乘短徑半之得積合問
市川行英門人
武州比企郡古寺邑　田中與八郎信直
同郡腰越邑　馬場與右衛門安信
同邑　久田善八郎儀知
文政十三年庚寅三月

図３　算法雑組の慈光寺観音堂の算額
（東北大学和算ポータルサイトより）

番は慈光寺のことである。具体的には次に示すようなものである。

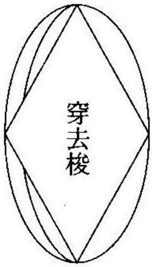
所掲于阪東九番観音堂者一事



今有如圖以等弧背抱五員天員徑六十八寸地員徑一十七寸問人員徑幾何

答曰人員徑六十四寸

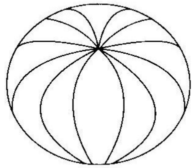
術曰以地徑除天徑名極平方開之六之加極及一个以除天徑一十六之得人徑合問



今有如圖長立員穿去梭長徑若干短徑若干問得穿去積術如何

答曰如左術

術曰置三个一分二釐五毫平方開之内減一个餘乗長徑及短徑冪與球積率得穿去積合問



今有如圖削矮立員一十二角（角背切立員周）長
徑若干短徑若干問得積術如何

答曰如左術

術曰置長徑自之乗短徑半之得積合問

市川行英門人

武州比企郡古寺邑　田中與八郎信直

同郡腰越邑　馬場與右衛門安信

同邑　久田善八郎儀知

文政十三年庚寅三月

【用語説明】

圖＝図。員＝圓＝円。个（こ）＝個、一个（いっこ）は一つで一個のこと。幾何（いくばく）＝どれほどか。術＝方法あるいは答えにいたる手順。長立員（ちょうりつえん）＝長軸に関して回転して得られる楕円体。穿去（せんきょ）＝穴を開けて取り去ること。梭（おさ、さ）＝菱形のことを中国の古算書では梭田という。若干＝いくつと定めないがその数が与えられているときに用いる。球積率＝玉積率ともいい、球が内接している立方体の体積と球の体積との比でπ／6に相当する。矮立員（わいりつえん）＝短軸に関して回転して得られる楕円体。

【解読】

一問目

今図のように互いに接する等しい円の円弧（等弧背）の間に五つの円を接するようにして、天円の直径が六十八寸、地円の直径が十七寸のとき、人円の直径はどれほどか。

答に曰く人円の直径は六十四寸

計算方法は、地径（地円の直径）で天径（天円の直径）を割り極と名づける。之を平方開し六倍し極及び一を加えたもので天徑の十六倍を割ると問に合う人径（人円の直径）を得る。

この計算方法は式1のようなものであり、勾股弦の理（三平方の理）と三角形の比例関係を使えば解けるが、この式を導き出すまでは面倒な計算が必要である。二問目以降も同様であるが計算方法と言っても結論だけで、その式を導き出す経過は述べられていない。つまり、多くの算額がそうであるように、「解曰」という式を導き出す文は長文になるためだろうか書かれていない。

二問目

今図のように楕円体を底面が菱形（菱形の対角線がそれぞれ楕円の長軸と短軸に等しい）の角柱で穿ち去るとき、穿ち去った楕円体の体積を求める方法はいかに。

答に曰く左の方法

計算方法は、三个一分二釐五毫（3.125）を平方開し一を減じたものに長径と短径を二乗したものを掛け球積率（π／6）を掛けて問に合う穿ち去った体積を得る。これは式2のようなものである。

三問目

今図のように矮立円（楕円体）を十二個に分割してその面を削る。削る角の背は楕円周上にある。（楕円の長径・短径から残った体積を求める方法はいかに。

答に曰く左の方法

計算方法は、長径の二乗と短径を掛け之を半分にして問に合う体積を得る。

これは式３のようなものである。

天円、人円、地円の直径をそれぞれd_1、d_2、d_3とし、

$k=\dfrac{d_1}{d_3}$としたとき、$d_2=\dfrac{16d_1}{6\sqrt{k}+k+1}$ となる。

今、$d_1=68$、$d_3=17$、$k=68/17=4$とおけば、

$d_2=\dfrac{16\times68}{6\sqrt{4}+4+1}=\dfrac{1088}{17}=64$(寸) となる。

式１　一問目の計算式

楕円体の長径、短径をそれぞれd_1、d_2とすれば求める体積Vは

$V=(\sqrt{3.125}-1)\ d_1\ d_2^2\ \dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\sqrt{2}-4}{4}d_1 d_2^2\dfrac{\pi}{6}$ となる。

式２　二問目の計算式

楕円体の長径、短径をそれぞれd_1、d_2とすれば求める体積Vは、 $V=\dfrac{d_1^2\ d_2}{2}$ となる。

式３　三問目の計算式

三、出題者のことなど

算法雑俎の編者・岩井重遠は文献5に、「右内と称す。上毛人なり。初め業を小野栄重（一七六三～一八三一）に受け、後ち白石長忠の門に入り、豁術（筆者注：かつじゅつ＝円理に関係した面積や体積を求める方法）を学びぬ。算法雑俎は問題答術を記るせしものにして、その過半は栄重、宜長、行英、安本、等の門人が掲額せし所の算題なり」とある。関流の小野栄重は上毛の算学の祖と言われる人で、その弟子には斎藤宣長（一七八四～一八四四）もいる。（市川行英については省略）

さて、出題者三名は仕事（農業？）の傍ら、和算をどのような動機でどのように学び、高度な問題を解き、どのような思いで掲額したのだろうか。詳しくは何もわからない。今から七十年前の文献4から要点のみ上げれば次の通りであるが、いずれも算学としての情報はほとんど得られなかったようである。

大河村（現小川町）下古寺に田中姓はあるが、田中與八郎信直（道）に直接結びつく資料などはないという。

腰越村（現小川町）の馬場與右衛門安信については、根古屋の馬場氏であり位牌に、

　闢山惠通居士位、弘化二乙巳年(1845)七月念有八日、
　馬場友八伜、俗名與右衛門行年四十一歳

とあるという。とすれば、算額には文政十三年とあるから二十六歳のときに掲額したことになる。

久田善八良（郎）儀知の家は腰越村小貝戸で墓に、

　見譽淨巖居士、嘉永四亥年(1851)四月廿四日
　俗名久田善八郎儀知、施主同苗頂太郎

とあるという。享年は刻してない。善八郎の婿が善次郎で其子が幾太郎翁(昭和十年七十一、二)で、此人の談を聞くに、善八郎が十露盤（そろばん）を教えた事は聞いて居るし、慈光寺観音堂へ額を上げた事も亦聞いて居るが、他に

聞く所はないという。

著者の三上義夫は著名な数学史の研究学者であるが、こういった状況を、「古い時代に就いて知る事が出来ないのは、何れの地でも同様ではあるが、此れも残念である。（略）如何に過去の算者が忘れられて居るかを思ふとき、時代のやや古いものは凡て忘却の中に落入って、知り得られないのであらう。」と嘆いている。なお算額そのものについては、「(比企郡の) 現在の算額では、慈光寺のものが最も内容の優れたものであるが、其れは師匠たる市川行英が有力者であった賜ものである。之れに名を署した三人の門弟が、殆んど事蹟の知られないのは惜しい」とも述べている。三上義夫は七十年前に比企郡における三十余人の算者の事跡を調べていてその功は大である。比企郡にも相当な算者がいたということである。

なお、久田善八郎儀知の墓は小川町腰越に現存し、筆者は子孫の久田友男氏に案内して頂き拝見している（図4）。その際、久田友男氏は、「善八郎は玉ねぎ形のものを計算したと聞いている」とおっしゃっていた。当に三問目のことである。

図４　久田善八郎儀知の墓
(小川町腰越)
（平成 21 年 6 月）

四、おわりに

算額の掲額者は会心の問題が解けた時に神仏に感謝するとともに、自慢げに掲げたことであろう。慈光寺の算額は和算の歴史でも後期に属し、円理の内容では典型的な内容のようである。上州出身ともいわれる算聖・

関孝和の出現以来、北関東は和算が盛んで、藤田貞資・今井兼庭・小野栄重などの人物が現れている。市川行英門下の比企郡の名の知られていない算者達も、その裾野を広げているかのようである。貴重な慈光寺の算額がいつの日か復元され、掲額されることを筆者は夢見ている。

【参考文献】

（１）「例題で知る日本の数学と算額」深川英俊（森北出版　1998年）

（２）「算額を解く」大原茂（さきたま出版会　平成十年）

（３）「埼玉の算額」（埼玉県史料集第二集　埼玉県立図書館発行　昭和四十四年）

（４）「武蔵比企郡の諸算者(1)～(5)」三上義夫（埼玉史談　1940年5, 7, 9, 11月号、1941年1月号（旧第11巻5, 6号、第12巻1～3号））

（５）「増修日本数学史」遠藤利貞遺著・三上義夫編（恒星社厚生閣　昭和56年）

（６）「算法雑俎」（東北大・林文庫）ポータルサイトは左記のＵＲＬです。
http://www2.library.tohoku.ac.jp/wasan/

（平成二十一年十月十七日）

※本稿は「あゆみ」（毛呂山郷土史研究会　34号　平成22年５月）に掲載したものを若干修正したものである。

付録７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**<u>慈光寺の算額の解法</u>**

慈光寺の算額は３問あるが、その内２問目と３問目を解くいてみる。

【二問目】楕円体を底面が菱形（菱形の対角線がそれぞれ楕円の長軸と短軸に等しい）の角柱で穿ち去るき、穿ち去った楕円体の体積を求める方法はいかに。

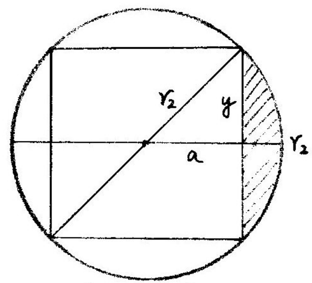
答は、

楕円体の長径、短径をそれぞれd_1、d_2とすれば求める体積Vは $V=(\sqrt{3.125}-1)\,d_1\,d_2^2\,\dfrac{\pi}{6}$ となる。

この問題に対して「算法算法雑爼解」は、「短径ヲ球径トス球之内方ヲ穿チ去積ヲ求メ乗長径以短径除之長立円之内菱ヲ穿チ去る積トス」と解き方を述べている。

つまり、球型に対して角柱で穿ち去った体積を求め、しかる後に（長径／短径）の比を乗じて求めている。

その解き方は以下のようになる。



$y^2 = r_2^2 - x^2$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2} r_2$

（１）楕円体の長径とその半径をd_1、r_1　短径とその半径を　d_2、r_2とする。

まず、半径r_2の球に内接する菱形の角柱で穿ち去った体積V_1を求める。

穿ち去ったあとの体積の１／４（図の斜線部分）V_0 は、

$$V_0 = \pi \int_a^{r_2} y^2 dx = \pi \int_a^{r_2} (r_2^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r_2^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_a^{r_2} = \pi \left(\frac{2r_2^3 - 3r_2^2 a + a^3}{3} \right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

$a : r_2 = 1 : \sqrt{2}$ だから、$a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_2$ を代入すると、$V_0 = \pi r_2^3 \left(\dfrac{8 - 5\sqrt{2}}{12} \right)$ ……②

従って、$V_1 = \dfrac{4}{3} \pi r_2^3 - 4V_0 = \pi r_2^3 \left(\dfrac{5\sqrt{2} - 4}{3} \right)$ ……………………………③

（２）③に対して、$\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$ 倍すれば、求める体積 V となる。つまり、

$$V = \frac{5\sqrt{2} - 4}{3} r_2^3 \frac{r_1}{r_2} \pi = \frac{5\sqrt{2} - 4}{3} r_1 r_2^2 \pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots④$$

④ に $\pi/6$（球積率）を入れるために変形する。また r の代わりに d を用いると、

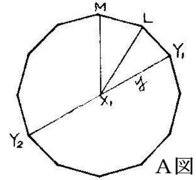
$$V = \frac{5\sqrt{2} - 4}{3} \frac{d_1}{2} \frac{d_2^2}{4} \pi = \frac{5\sqrt{2} - 4}{4} d_1 d_2^2 \frac{\pi}{6} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤$$

$\dfrac{5\sqrt{2}}{4} = 1.25\sqrt{2} = \sqrt{3.125}$ だから　$V = \left(\sqrt{3.125} - 1 \right) d_1 d_2^2 \dfrac{\pi}{6}$ ………⑥

【三門目】矮立円（短軸に関して回転して得られる楕円体）を十二個に分割してその面を削る。削る角の背は楕円周上にある。（楕円の）長径・短径から残った体積を求める方法はいかに。

答は、

楕円体の長径、短径をそれぞれd_1、d_2とすれば求める体積Vは、 $V=\dfrac{d_1^2 d_2}{2}$ となる。



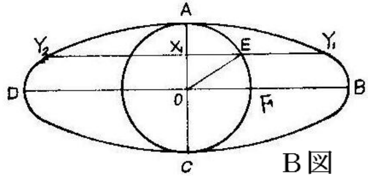
A図

（１）A図は、B図で水平に切断したときの上面図である。

正 12 辺形の面積Sは、$S=3y^2$となる。B図において、

$$X_1E=\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2-x^2}$$ また $X_1Y_1 : X_1E = OB : OF$ だから

$$y : \frac{\sqrt{d_2^2-4x^2}}{2}=\frac{d_1}{2}:\frac{d_2}{2}$$ つまり $$y=\frac{d_1}{d_2}\frac{\sqrt{d_2^2-4x^2}}{2}$$



B図

（２）求める体積Vは、

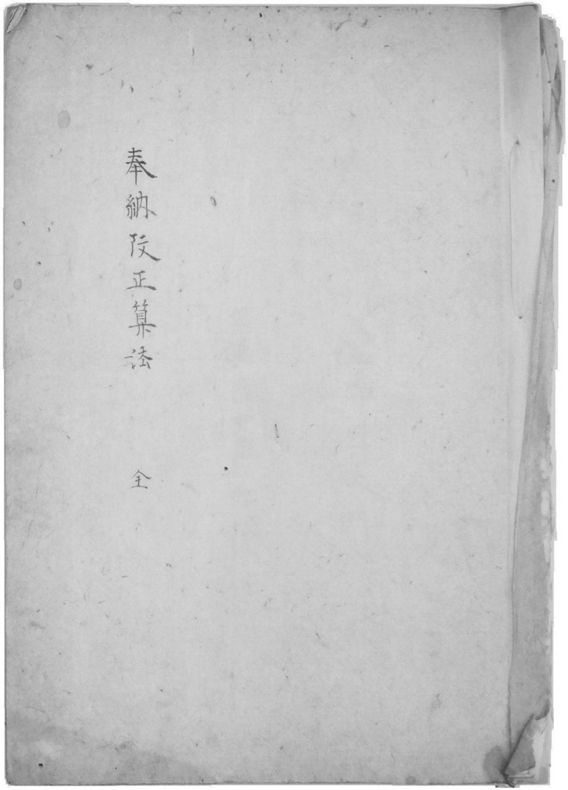
$$V=2\int_0^{\frac{d_2}{2}}3y^2dx=2\int_0^{\frac{d_2}{2}}\frac{3d_1^2}{d_2^2}\left(\frac{d_2^2-4x^2}{4}\right)dx$$

$$=\frac{3d_1^2}{2d_2^2}\left[d_2^2x-\frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{d_2}{2}}=\frac{1}{2}d_1^2d_2$$

（注）三門目の解法は「埼玉の算額」に依りました。なお、「算法雑俎解」では長径の球を想定して削積を先に求め、それに（短径／長径）を乗じて解を得ている。

付録８．改正算法　全写し

（石井家文書D01～21）



D01

關流八傳 市川玉五郎行英 門人

武州高麗郡原市場邑

石井彌四郎和儀

目録

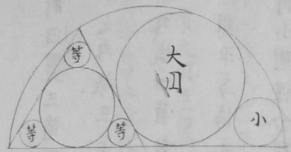
坂東十番觀世音堂者一條

並改正別術

同十一番

目録終

所懸于坂東十番觀世音堂者一事



今有如圖半円内容三角面及隅角面
内外交蟠六円只云者等圓徑若干乃
三角面段二與外圓徑相等問外円徑大
円徑小円徑得各其術如何

答曰如左

術曰置三箇開平方名天乘等円六段得外円巠又曰天二段之内減三箇名甲乘外円巠得大円巠次曰以甲除天三段内減四箇餘名乙乘等圓徑十八段加大圓巠名丙乘大圓徑開平方倍之以減丙位大円徑和内餘以乙冪除之得小圓徑合問

別術

術曰置一十二箇開平方名率乘等円徑三段得外円巠置率三除之加一箇以除外円巠得大円巠置率加三箇五分乘大円巠冪四十八段開平方減大円巠因率餘除率二段一十八箇和自之除大円巠得小円巠合問

假等徑一寸

外徑一千〇寸三九
大徑　四寸八二
小徑一寸七〇
有奇

依術求外円徑

定率等　八　外徑

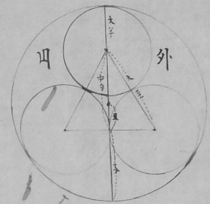
率　八　中鈎

解義

七分五厘　開二千方　各率

三箇　開二千二方　各大率

一十二箇　開一千方　各定率



三婢
八
丑

外
二大
婢
八
子

置子加丑寄左與外半巠相消

二外
三大婢
二大
矩合

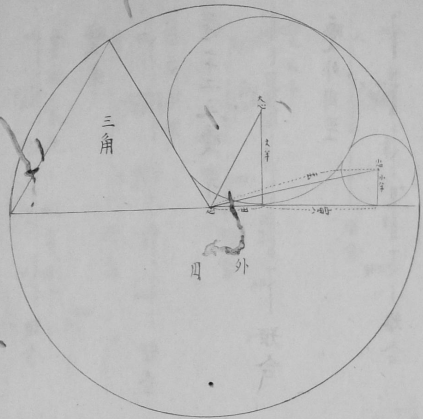
遍乘二變率

外
大率大
大
矩合

括

大率
八
名極

極外
八
大巠



二外
小
八
丢

三大率
八
丑

大小商
八
寅

置丑寅八和巾加小半
巾寄左與弦冪
相消

小
三 大小平高 大平
大平
四 外巾
四 外小
矩合

變平

小
大平 大小高 大
九 大巾 平巾
四 外巾
三 外小
矩合

適一千二之變平

小
大平 大小高
大巾
外巾
外小
矩合

變外四巠

小
大小高 大大平
四 大巾
四 外巾
大小極
矩合

括立

大
大小高 大平
地 大小
矩合

變大平

天
大小高 大 定平
地大小
矩合

得寅求式

天
大 定平
地
此高八寅

實級乘地广級省地

大小高
八寅

外巾
大巾
八 名天

極
八 名地

天地
定大宰
此商
實地

方年立負商開之

大巾 天地
○
此商
實地
定大宰

乾式

實級天地相乘解之

外巾 極
外巾
大巾 極
大巾
八
天地

實級大巾異減之
解極變之

外 極
八
大

外巾 極
外巾
大外
實級

通乘極巾除極巾而變

大巾 極再
大巾 極巾
大巾 極
實級

解極

大巾 六 大宰
大巾 六
大巾 三十六 三
大巾 三十六 大宰
大巾 三十六
大巾 十八 大宰
大巾 十八
大巾 十八 大宰
大巾 十八
實級

異減同加而

大巾 大率 大巾 實級

變率

大率 大巾 大巾 實級

大率變定率

定率 大巾 大巾 定實級

置地解極

大率 八 地

大率乘除而變

大率 八 地

大率青變定率

定率 八 地

右立方年負二商開所式變而定開式

定率 大巾 大巾 ○

此商 定率二段干八箇和 大商 小商

大 定率

如此 依是得小商也

定率八外四巠

負法

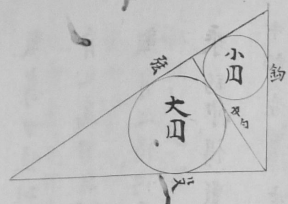
外巠　三定率　得大四巠定式

右得ニ外四及大小四各巠ノ定式依是施本術文義

乃定率者本術

用ノ率也

所懸于坂東十一番觀世音堂者二事



今有如圖鈎股弦内隔中鈎大平円径小
平円径容二箇只云者從大平円径小平円
径者四寸短並云者從股弦者一尺長鈎
股弦大円径小円径各問幾何

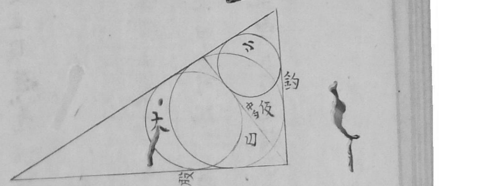
答曰 鈎三尺 股四尺 弦五尺
大円径一尺六寸
小円径一尺二寸

術曰立天元一爲股加入又云數爲弦以只云數乘之得
數寄甲位列又云數以股乘之得數加入甲位得數
自之爲因弦冪小円巠中鈎差冪寄乙位列去得
數自之得内去股冪止餘爲鈎冪寄丙位股自
乘鈎巾得數乘又云數因ゞ又因弦冪爲小円巠中
中鈎差冪寄左列乙位得數乘股與寄左相消
得開方式

施主 銀谷邑
矢嶋久五郎豊高

右段正二條内一條 一條者別書出
今有如圖鈎股内隔中鈎容大円及小円只云大小円巠差若干
又云股弦差若干問得股術如何
答曰如左文
術曰立天元一爲股加又云數爲弦自之名甲減股冪餘
乘甲寄左〇列又云數乘股二段得數加只又云和因弦自
之與寄左相消得開方式立方開之商得股合問

D12



解義

弦
又
八
殳

殳
又
八
云

大径
只
八
小径

小径
只
八
大径

鈎
殳
弦
八
仮径

依是維乘法加之

弦	股	鈎
仮円径	大円径	小円径

殳 弦大
仮
前矩合

勾 殳 小
大
後矩合

前後矩合解大円径

殳 小弦
殳 只弦
仮
前矩合

勾 殳 小
小
只
後矩合

演段依術求小径設前後式

D13

殳　殳弦
殳弦
術式

依術
殳
鈎殳
鈎弦
矩合

只
鈎殳
後式

遍乘鈎

鈎
殳
弦
矩合

解依四變之

弦
又巾
弦
弦巾
乡巾
弦
矩合

弦巾 弦 又巾 八又巾 故變而	弦 弦巾 加減而變之	弦巾 加減而變之

弦巾
又巾
只弦
又巾
殳弦
鈎
矩合

變里八減又冪布

弦巾
殳巾
弦
弦
鈎
矩合

弦因殳加減而變之

弦巾
殳
弦
弦
鈎
矩合

括之而

殳
弦
弦
弦
矩合

弦 殳巾 加減之而	弦 加減之而

括之而

矩合

依術左右分之自之

左冪 ○ 右冪

左冪與右巾相消

矩合

解鈎冪

矩合

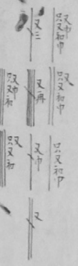
解弦

矩合

異減同加而之

定 矩合

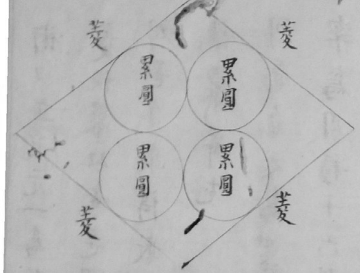
如例求股開方式



定式

於是如定例得股施本術

所懸于坂東十一番觀世音堂者二事



今有如圖菱面内容同寸圓徑四箇只云菱長冪與横冪共和寸平積四百步別云外積四十五步四厘四毛菱長横圓徑菱面各問幾何

答 菱長壹尺六寸 圓徑四寸 菱面一尺 菱横壹尺二寸

術曰立天元一為菱長自之去只云數内止餘為
菱横冪以乘長冪為菱積冪四段寄天位
列長自乘得數與天位相乘為千二十四段菱
積冪寄左
列長自之為四箇圓徑和冪得數乘圓積
率為四積十六段四之為六十四段圓積寄
地位列別云數十六之加地位為菱積十六段
得數自四之為千二十四段菱積冪與
寄左相消得開方式五乘方飜方開
之得菱長合問

右改正

下録谷邑
施主
矢嶋久五郎豊高

今有如圖菱内等圓四箇只云長冪平冪
和若干別云外餘積若干問得等圓徑術如何

答曰如左

術曰置只云數四除之名甲開平方名乙
置圓周率内減一箇餘乘別云數以

裁界餘閉平方加乙以除別云數得
等円徑合問

解曰

円径

自之乗円責率

円責率 径巾

四之加別云數為菱責

円責率 径巾

別云

寄左

只云

閉平方八

面

面径

径巾

面二段加円径乗四径

円径率 面巾

別云

面径

径巾

與寄左相消

矩合

求円径式

別云

面

此高

径

円率

上下顛倒之

円率

別云

此高

径

遍除別言數

別云 四率 別云 ‖ 別云 面 ‖ ‖ 此商 ‖ 亞

以乘別云數

別云 四率 別云 ‖ 面 ‖ ‖ 此商 ‖ 別云 亞

立方平正商開之

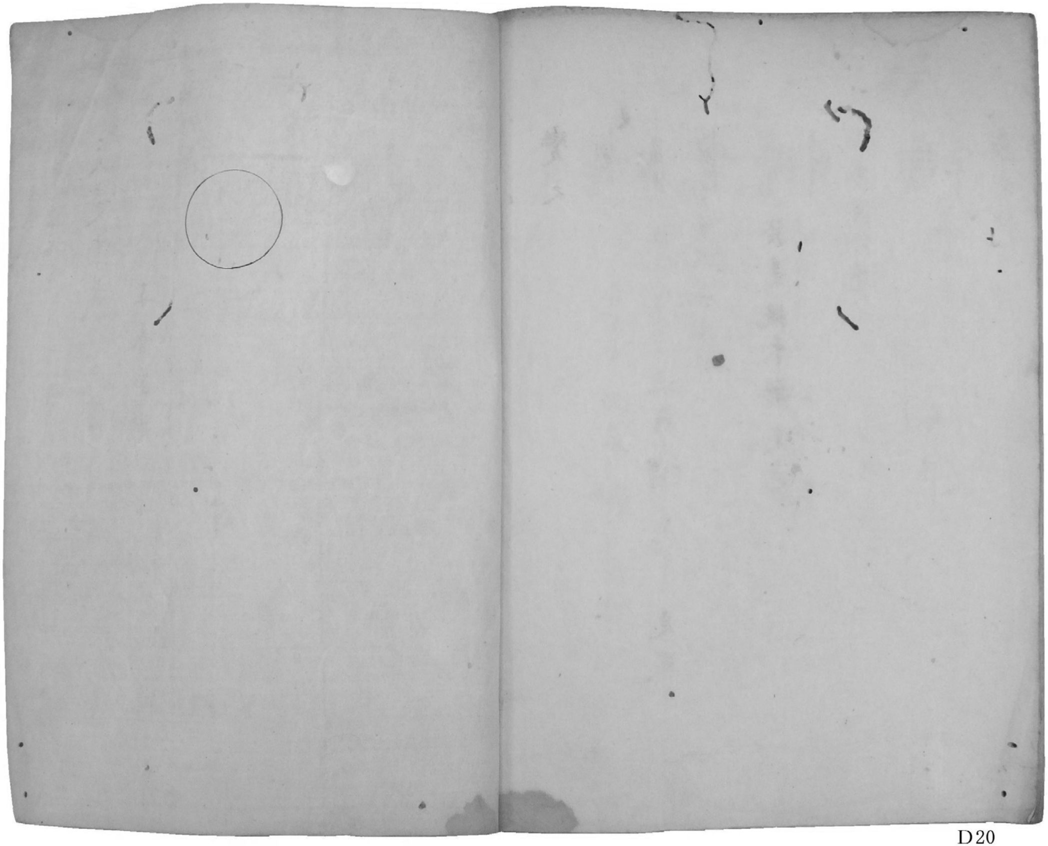
面巾 ‖ 別云 四率 ‖ 別云 ‖ ○ ‖ 此商 ‖ 別云 亞 ‖ 面

變之

別云 ‖ 別云 四周率 ‖ ○ ‖ 此商 ‖ 別云 亞 ‖ 面 ‖ 是式

四只

於是施本術文 星栈



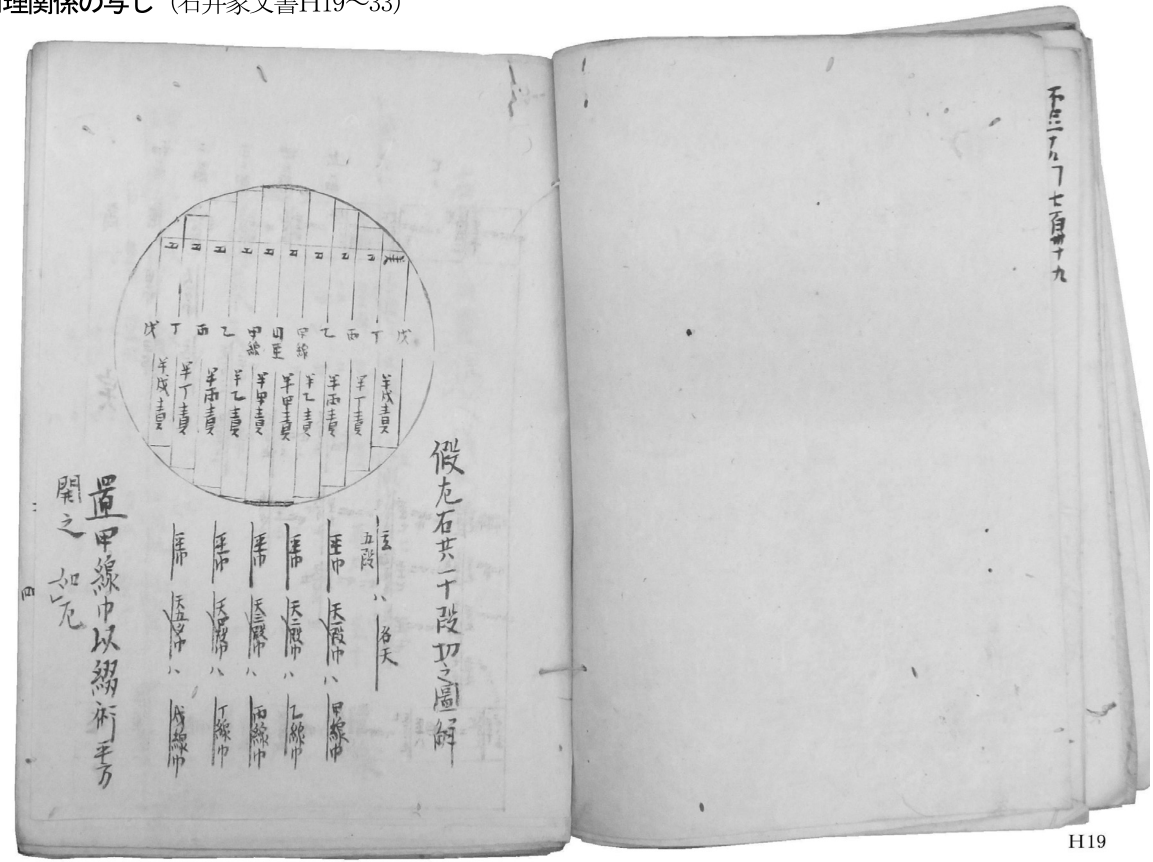
D20

文政十一歳

子春解術

D21

付録９．円理関係の写し（石井家文書H19〜33）


假左右共二十段切之圖解

置甲線巾以綴術平方

開之如左

H19

右閉出商置依之得甲線

甲線

甲線乘天

甲實

初商

二商

三商

四商

五商

六ノ

七ノ

商

実

法

广

H20

依前得乙丙丁戊各責

乙責

丙責

丁責

戊責

H21

天元

解之

一平方如ヲ一依テ術試之

解 天各置従甲乙丙丁戊責ヲ増約之而

帯責

三 二

五 四 二

七 二 四 二

九 八 二 四 二

十一 二 八 二 四 二

十三 四 二 八 二 四 二

八

帯責

丟登ル至ヲ省ク至ヲ乗除

三 二

五 四 二

七 二 四 二

九 八 二 四 二

十一 二 八 二 四 二

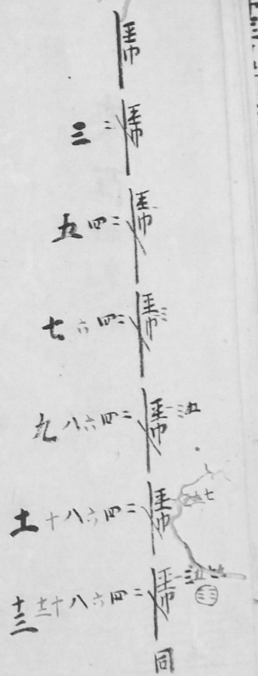
十三 四 二 八 二 四 二

圓十五貫

是ハ直数

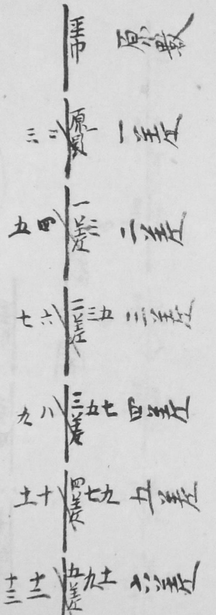
合ヲ遠ル

乗除而定ル例



同圖十二頁

以初級爲原數以除二級爲一差以二級除三級爲二差以三級除四級爲三差逐如此



圖十二頁

於是施本術

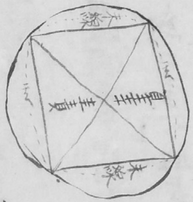
術曰置円率巾爲原數一乘三二除爲一差三一乘四五除爲二差三五乘七六除爲三差逐如此

求諸差置原數減累差余得円周合問

H23

依前解求二末線及直𠀤與二

圭𠀤一



丟巾

玄巾

八 末線巾

以綴術開之

丟

二 丟 玄巾

四 二 丟再 玄三

二 四 二 丟四 玄五

八 二 四 二 丟六 玄七

二 八 二 四 二 丟八 玄九

四 二 八 二 四 二 丟十 玄十一

末線

置末線乘玄為直𠀤

丟 玄

二 丟 玄巾

四 二 丟再 玄三

二 四 二 丟四 玄五

八 二 四 二 丟六 玄七

二 八 二 四 二 丟八 玄九

四 二 八 二 四 二 丟十 玄十一

直𠀤

四段 玄圭𠀤

以直背減帯背余半之為弧背

省ニ不用乗除而定例

帯背

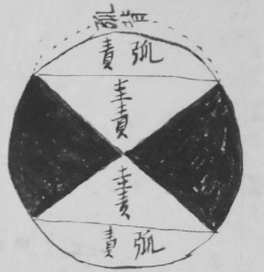
括之求原數及諸等

原數	率弦	二三
一差	原率一三	二五
二差	一差率三五	四七
三差	二差率五七	六九
四差	三差率七九	八十一
五差	四差率九十一	十十三

弧背依是求本術

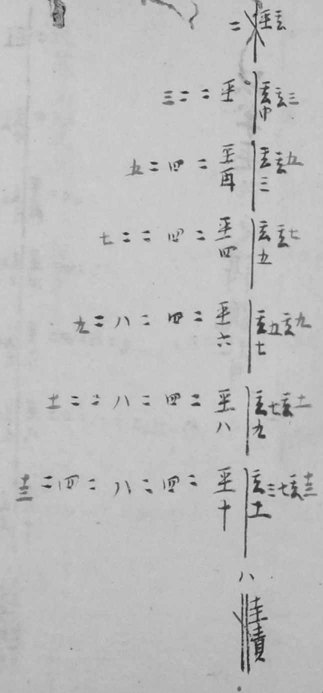
術曰以圓巠除玄自之名率乘四巠及玄二三除為原數乘率乘一三乘二五除為一差乘率乘三五乘四七除為三差逐加此求諸差

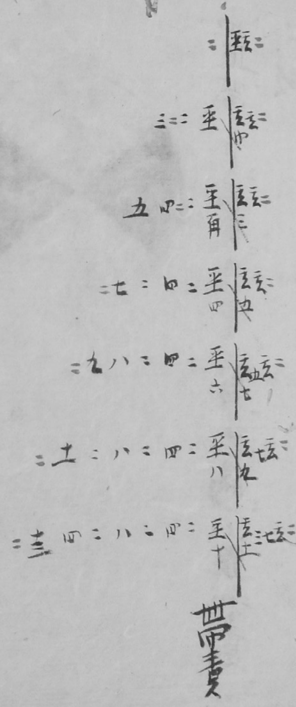
置原數累加諸差得弧背合問



二段

置帶背內截圭背二段餘為圭弧和背





H27

二矢弦

矢三四　弦巾弦

二五四二　矢再　弦弦三

二七二四二　矢四　弦五弦

九二八二四二　矢六　弦七弦九七弦

十二二八二四二　矢八　弦九弦七九弦

十三二四二八二四二　矢十　弦十一弦三七十一弦

八 圭弧和積

以半弦除之得弧背

二率 弦

弦

三二　矢巾　弦再一

五四二　矢三　弦四三

三七二四二　矢五　弦六五三

九八二四二　矢七　弦八五七

九十一二八二四二　矢九　弦十七九

三十三四二八二四二　矢十一　弦十三三七十一三

弧背

乗除而定例

括率

矢巾 弦巾

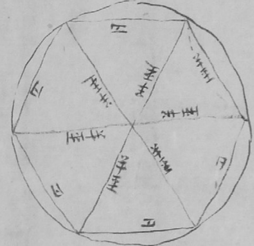
八率

原數	弦
一差	原數率巾 三二
二差	一差率巾 五四
三差	二差率巾 七六
四差	三差率巾 九八
五差	四差率巾 十一十
六差	五差率巾 十三十二
累加八率	八差弧背

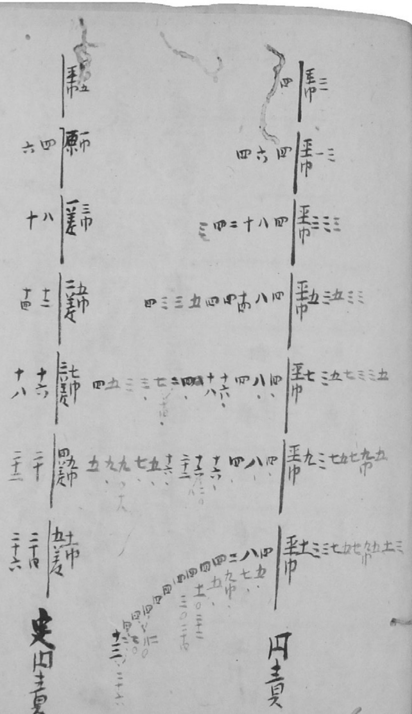
術曰以圓至二除弦自之名率置弦爲原數乘二率
率及一巾一三二除爲一差乘率及三巾一四五除爲二差
乘率及五巾一六七除爲三差遂如此求差置原
數累加遂差得弧背合問

置圭弧矢貢二段二三之弦冪羊至二求圓直
貨至

玉巾 三 [illegible]
玉巾 二三 八二三二 [illegible]
玉巾 三三 [illegible]
玉巾 九三 [illegible]
玉巾 七五三 [illegible]
玉巾 九七三 [illegible]
玉巾 十一七三三 [illegible]
八四貢



亦求円積解



於是施本術文義

円積

実円積

術曰置田平巾乘七分五厘爲原數乘
壹巾六四除爲一差乘三巾一千八除爲二差
乘五巾一千四十二除爲三差逐加此乘諸差加
一置原數加逐差得四毒是合問

原	一差	二廿	三卅	四廿	五廿	六廿
七分						
五	三					
	一	三				
	二	五	七			
	五	一	[illegible]二	八	一	
		五	[illegible]三	[illegible]九	六	三
		六	[illegible]一	[illegible]	二	一
		二	五	[illegible]	[illegible]八	七
		七	[illegible]八	[illegible]九	[illegible]六三七	六

六差相併真數合一五位
七分八五三九有奇

H31

求円周解

置定円責四之除円径得円周

円径三		
原一巾	四	六
一差三巾	八	十
二差五巾	十二	十四
三差七巾	十六	十八
四差九巾	二十	二十二
五差十一巾	二十四	二十六
定円周 是後接	本術	

術曰置三箇円径為原数乗一巾

四六除為一差乗三巾八十除為二差

H32

乘五巾一千三一千四除為三差逐如此求差

置原數加諸差得円周合問

諸差

原數	三											
一差		一	二	五								
二差			一	四		六	二	五				
三差				二		九	二	六	三	四		
四差					三	五	六		四			
五差						六	五	五	四	三		

六差						一	二	七		九		
七差							二	五	五	七		
八差								五	二	八		
九差								一	一	一		
十差												
各併之円周率	三	一	四	一	五	九	二	六	有	奇		

后諸差略之

あとがき

石井家文書を発見したときの感激が忘れられない。相当量の和算史料を発見しただけでも驚きを禁じ得なかったが、別の意味合いもあった。

平成二十三年十月二十二日に石井家文書A、B、Cの三編を発見した。Bの史料に出て来る図形は見覚えのあるものであった。それは毛呂山の郷土誌に寄稿した「毛呂周辺の算額」で述べた東松山の岩殿観音の幻の算額の図形に酷似していたからである。ひょっとしたら石井弥四郎和儀は岩殿観音の算額を書き写していたのではないか、それを解いた下書きではないかとの思いが持ち上がった。他にも未見の史料があるのではないかとの思いもわいてきた。

二ヶ月後の十二月二十二日再度調査させていただき、石井家文書D以下を発見した。予感は的中した。「奉納改正算法」と題する書物の中味はまさに岩殿観音の算額を写し採ったものであった。別解まで示してあるではないか。岩殿観音の幻の算額の全貌が判明すると思った。発見した和算史料の総頁数は二五〇頁を越えた。全部は無理としても、主だった個所だけでも解読してみようと強く思った。

石井弥四郎和儀という和算家を知ったのは、飯能市虎秀出身で江戸中期の天文暦学者・千葉歳胤を調べていたときである。天文暦学者は当然和算にも通じていたので、調査をしているうちに同郷の石井和儀を知ることになった。それは本書に何度も出てくる「算法雑俎」という書物からであった。千葉歳胤の調査が一区切りしたあと、慈光寺の算額などと並行して石井和儀の算額の問題（子の権現の問題）も調べ始めた。しかし、わずか四行の術文がなかなか解読できない。ならば直接現代数学で解いてみようとしたが、「それなり」に勉強した筈の微積分も四十五年も経つとほとんど忘れていて役に立たず、結局畏友に助け

て頂くことになった。そして四行の術文の誤訳まで指摘していただいた。解いていただいた数式を理解した上で（昔の感覚を取り戻して）、今度は和算ではどのように解かれていたかに挑戦してみた。傍書法で書かれた内容は少し戸惑ったが、すんなりと理解でき当時の解法を知った。

和算を知る上で大事なのは、どのような問題を扱ったかという数学的なことと同時に、その人物や社会的背景などの文化史的側面も知ることである。いわば車の両輪である。石井和儀について言えば、子の権現の問題を現代数学と和算の両方の解き方を知ったので前者は一応クリアしたことになる。一方、後者について言えば、石井和儀の生没年さえも不明であった。このことに拘りをもち、原市場周辺の寺院の墓地を訪ね歩いたが見つからなかった。諦めかけたときにある人から子孫の方を紹介していただき、同家に伝わる古文書類の拝見は勿論、墓地の案内までしていただいた。そして見つかったのが既述の石井家文書と石井和儀の墓石であった。筆者にとっては思いも寄らぬ劇的なうれしい展開となった。調査は当初の予想をはるかに上まわる進展をみることになり、この小冊子にまとめることができた。調査開始から足掛け三年が過ぎた。

遺された史料からは石井和儀の人物像や社会的背景などに踏み込むには限界もあるが、石井家文書により部分的かも知れないが江戸末期の飯能という一地方の算者の事績が具体的に解明されたと思っている。特に子の権現の問題まで考えると積分まで扱った石井和儀の当時のレベルの高さを伺い知ることができた。飯能にも当時としては高尚な問題を扱っていた相当な和算家がいたのである。

筆者は飯能出身の千葉歳胤（和算家でもあろう。墓は市指定文化財）と石井和儀の二人を調べてきた。千葉歳胤は、天文暦学で江戸という中央でそれなりに知られる活躍をし著書も多く遺したが、地元に伝わるものは若干の衣類のみである。埼玉北西部の和算家の一次史料がほとんど失われていることと併せて考えると、石井和儀の遺した和算史料・石井家文書は文化財として大変貴重なものであると思われる。

【謝辞】畏友川田義広氏には子の権現の算額の内容の正しさを数学的に証明していただきました。この証明に勇気づけられ和算の解法の調査に進むことができました。石井弥四郎和義の子孫であられる石井健様には石井家文書の拝見及び石井家墓地の案内で一方ならぬ御世話になりました。小川恵介様には石井健様をご紹介していただきました。飯能市郷土館の尾崎泰弘様には石井家文書や西光寺過去帳の拝見で御世話になりました。これらの方々のご協力によりこの小冊子をまとめることができました。記して心から感謝しお礼を申し上げます。

平成二十四年四月十五日　山口正義

飯能の和算家・石井弥四郎和儀
～～ 一地方の算者の事績 ～～

発行　　2012年（平成24年）5月1日
著者　　山口正義
住所　　東京都羽村市緑ヶ丘3-21-2
email　　masayoshi.y@oboe.ocn.ne.jp
印刷　　(有)ひまわり印刷

非売品　（50部）