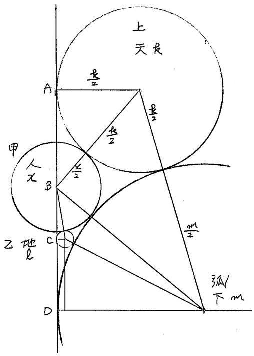
附録七　慈光寺の算額の解法

【１問目】

『算法雑俎解』にある解法を中心に述べる。図のように変数を定義したとき、図からまず次の関係が求まる。



図からすぐに

$AD^2 = km$、$AD = \sqrt{km}$ ……①

$CD^2 = \left(\frac{m}{2}+\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}-\frac{l}{2}\right)^2 = lm$、$CD = \sqrt{lm}$ …②

$AB^2 = \left(\frac{k}{2}+\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{2kx+x^2}{4}$、 $AB = \frac{\sqrt{2kx+x^2}}{2}$ …③

$BD^2 = \left(\frac{m}{2}+\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{2mx+x^2}{4}$、 $BD = \frac{\sqrt{2mx+x^2}}{2}$ …④

$BC^2 = \left(\frac{l}{2}+\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{2lx+x^2}{4}$、 $BC = \frac{\sqrt{2lx+x^2}}{2}$ …⑤

ここで、 $AD - BD = AB$ …⑥

$BD - CD = BC$ …⑦

①②③⑥より、

$k^2x^2 - 4k^2mx - 6kmx^2 + 4k^2m^2 - 4km^2x + m^2x^2 = 0$ …⑧

これは、$(kx - 2km + mx)^2 = \left(2\sqrt{2}\sqrt{kmx}\right)^2$

$\therefore$ $kx - 2km + mx - 2\sqrt{2}\sqrt{kmx} = 0$ （一矩合）…⑨

④、⑦より同様にして、

$m^2x^2 - 4lm^2x - 6lmx^2 - 4l^2mx + 4l^2m^2 + l^2x^2 = 0$ …⑩

$\therefore$ $-mx + 2lm - lx - 2\sqrt{2}\sqrt{lmx} = 0$ （二矩合）…⑪

⑨×l＋⑪×mから、$\sqrt{m} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{kl}}{\sqrt{k}-\sqrt{l}}$ …⑫

また、⑨+⑪から、$\left(\sqrt{k}-\sqrt{l}\right)x - 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{l}\right)m - 2\sqrt{2}\sqrt{mx} = 0$ …⑬

この式に、⑫を代入して次の答式を得る。

$x = \frac{16kl}{6\sqrt{kl}+k+l}$ …⑭

『算法点竄手引草』の解法は、上述の「算法雑俎解」の解法とほぼ同様だが余分なこともなくすっきり短く書かれている。なお、⑭からさらに変

形して右のようにしている。

術文はこの最後の式から以下のように書いている。(　)内は筆者追記。

術曰上径(k)を置乙径(l)に割平方にひらき三個を加へ四に割是を懸合せ内五分(0.5)を引餘里以て上径を割甲径(x)を得て問に合す

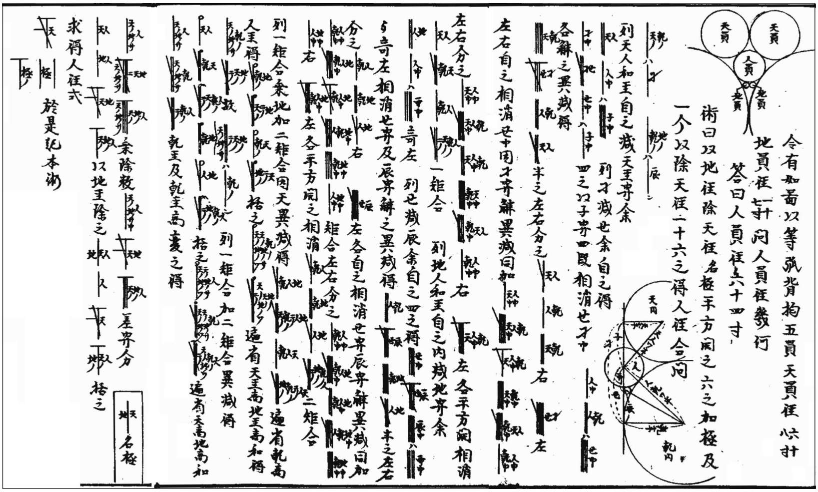
$$kx + lx + 6\sqrt{kl}\,x - 16kl = 0 \text{ を}$$

16で除して、$\dfrac{kx}{16l} + \dfrac{x}{16} + \dfrac{6\sqrt{k}\,x}{16\sqrt{l}} - k = 0$

極$= \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{k}{l}} + \dfrac{3}{4}$　として

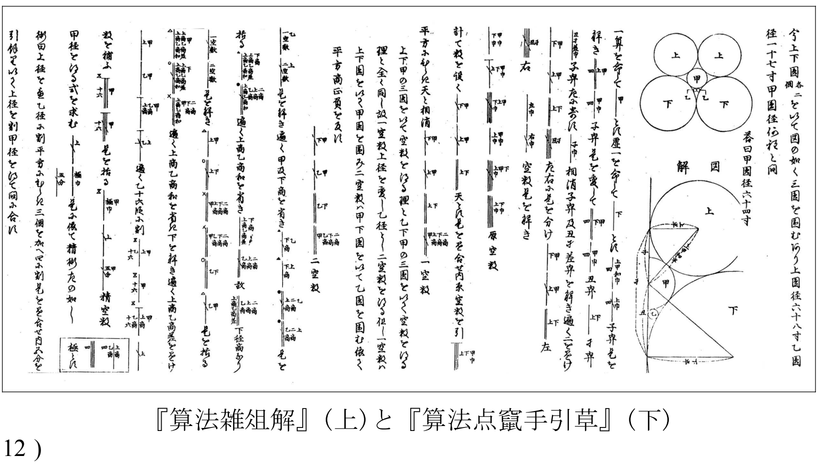
$$x = \frac{k}{\text{極}^2 - 0.5} = \frac{k}{\left\{\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{k}{l}} + 3\right)\right\}^2 - 0.5}$$

時代的には『算法雑俎解』よりこの『算法点竄手引草』の方が37年古く、算額の掲額の文政13年の３年後ということになる。


今有如圖以等弧背拘五員天員徑八寸 地員徑一寸問人員徑幾何

答曰人員徑五十四寸

術曰以地徑除天徑名極平方開之六之加極及一个以除天徑二十六之得人徑合問


今上下圓各二個を以て図の如く三圓を囲むあり上圓径六十八寸乙圓径一十七寸甲圓径何程と問

答曰甲圓径六十四寸

解図

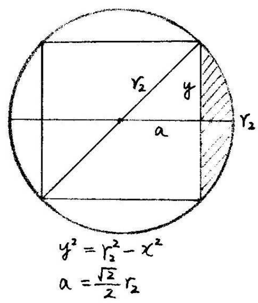
術曰上径を乙径に割平方にひらき三個を加へ四に割是を懸合せ内五分を引餘を以て上径を割甲径を得て問に合す

『算法雑俎解』(上)と『算法点竄手引草』(下)

【２問目】

「算法雑組解」は、「短径ヲ球径トス球之内方ヲ穿チ去積ヲ求メ乗長径以短径除之長立円之内菱ヲ穿チ去る積トス」と解き方を述べている。

つまり、球型に対して角柱で穿ち去った体積を求め、しかる後に（長径／短径）の比を乗じて求めている。その解き方は以下のようになる。



(1) 楕円体の長径とその半径を d_1、r_1、短径とその半径を d_2、r_2 とする。

まず、半径 r_2 の球に内接する菱形の角柱で穿ち去った体積 V_1 を求める。穿ち去ったあとの体積の 1/4（図の斜線部分）は、

$$V_0 = \pi \int_a^{r_2} y^2 dx = \pi \int_a^{r_2} (r_2^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r_2^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_a^{r_2} = \pi \left(\frac{2r_2^3 - 3r_2^2 a + a^3}{3} \right) \quad \cdots\cdots ①$$

$a : r_2 = 1 : \sqrt{2}$ だから、$a = \frac{\sqrt{2}}{2} r_2$ を代入すると、$V_0 = \pi r_2^3 \left(\frac{8 - 5\sqrt{2}}{12} \right)$ …②

従って、$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 - 4V_0 = \pi r_2^3 \left(\frac{5\sqrt{2} - 4}{3} \right)$ ……③

(2) ③に対して、$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2}$ 倍すれば、求める体積 V となる。つまり、

$$V = \frac{5\sqrt{2} - 4}{3} r_2^3 \frac{r_1}{r_2} \pi = \frac{5\sqrt{2} - 4}{3} r_1 r_2^2 \pi \quad \cdots\cdots ④$$

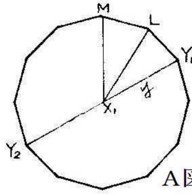
④に $\pi/6$（球積率）を入れるために変形する。また r の代わりに d を用いると、

$$V = \frac{5\sqrt{2} - 4}{3} \frac{d_1}{2} \frac{d_2^2}{4} \pi = \frac{5\sqrt{2} - 4}{4} d_1 d_2^2 \frac{\pi}{6} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$\frac{5\sqrt{2}}{4} = 1.25\sqrt{2} = \sqrt{3.125}$ だから　$V = \left(\sqrt{3.125} - 1\right) d_1 d_2^2 \frac{\pi}{6}$ ……⑥

【３問目】

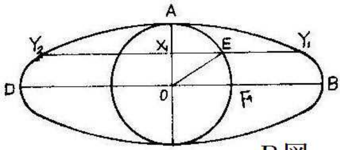
(1) Ａ図はＢ図で水平に切断したときの上面図である。



A図

正 12 辺形の面積 S は 、$S=3y^2$ となる。

Ｂ図において、



B図

$$X_1E=\sqrt{\left(\frac{d_2}{2}\right)^2-x^2}$$

また、

$X_1Y_1 : X_1E = OB : OF$ だから

$$y:\frac{\sqrt{d_2^2-4x^2}}{2}=\frac{d_1}{2}:\frac{d_2}{2} \quad \text{つまり} \; y=\frac{d_1}{d_2}\frac{\sqrt{d_2^2-4x^2}}{2}$$

(2) 求める体積 V は、

$$V=2\int_0^{\frac{d_2}{2}}3y^2dx=2\int_0^{\frac{d_2}{2}}\frac{3d_1^2}{d_2^2}\left(\frac{d_2^2-4x^2}{4}\right)dx$$

$$=\frac{3d_1^2}{2d_2^2}\left[d_2^2x-\frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{d_2}{2}}=\frac{1}{2}d_1^2d_2$$

（注）３問目の解法は「埼玉の算額」に依りました。なお、『算法算法雑俎解』『算法求積通考』では長径の球を想定して削積を先に求め、それに（短径／長径）を乗じて解を得ている。