やまぶき 4
田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）
第83号　令和四年（二〇二二）七月八日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三～二一～二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき　和算と歴史随想」

学士院と学習院大の「乾坤之巻」の解読要約

日本学士院の「乾坤之巻」（坤巻欠）と学習院大学の「乾坤之巻」（弧背真術）を解読したので、不十分ですが要約を記します。なお、学士院の乾巻と学習院の乾巻はほぼ同じ為、学習院のは坤巻のみとします

日本学士院の「乾坤之巻」の乾之巻（61、81 号参照）

（１）演段

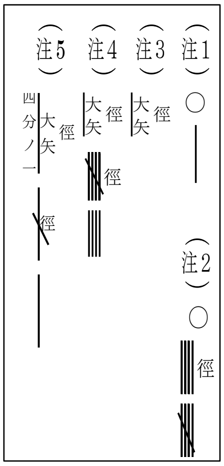
原文は以下のような設問から始まる。

今有圓徑一尺 大矢一寸如圖

半弧中容二斜 問求甲矢歩術

答曰

立天元一為甲矢［(注 1)］以減徑得数乘甲矢為半弧中二斜半弦冪四之為半弧中二斜弦冪得数［(注 2)］寄左　列大矢乘徑爲半弧中二斜弦冪［(注 3)］與寄左相消［(注 4)］四約之［(注 5)］



これを具体的に求めてみると以下のようになる。

AB=二斜、AN=NB=(二斜の)半弦、

AM=c 、CN=c_1

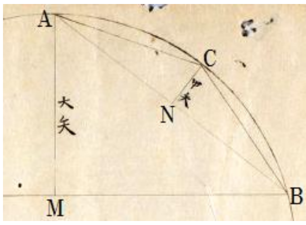
AB²=cd 、AC²=$c_1 d = c_1^2 + \mathrm{AN}^2$

$\therefore\ \mathrm{AN}^2 = c_1 d - c_1^2 = c_1(d - c_1)$

一方、AB=2AN だから、

AB²=4AN²=$4c_1(d - c_1) = cd$

$\therefore\ c_1^2 - dc_1 + cd/4 == 0$　　　①



（２）甲矢を求める

次に、①を使用して甲矢 c_1 を級数の形で詳細に計算し、第八商まで求めている。求め方は建部や今井の円理弧背術の解き方と基本的には同じで、１変数の高次方程式を数値的に解く「天元術」（ホーナーの解法）の方法である。但し数字係数ではなく c, d の文字係数である。組立除法で八商まで具体的に計算してみたが、原文の数字と一致している。その後、「以下開除式略之」とし、「列併所レ得之原数及諸商則爲甲矢形其式如左」とある。単純に各商（八商まで）を併せたものは次のようになる。（この式自体は原文にない）

$$c_1 = \frac{c}{4} + \frac{c^2}{16d} + \frac{c^3}{32d^2} + \frac{5c^4}{256d^3} + \frac{7c^5}{512d^4} + \frac{21c^6}{2048d^5} + \frac{33c^7}{4096d^6} + \frac{429c^8}{65536d^7} + \cdots \qquad ②$$

これを次のように変形している。

$$c_1 = 原数 + 原数\frac{1c}{4d} + 一差\frac{1c}{2d} + 二差\frac{5c}{8d} + 三差\frac{7c}{10d} + 四差\frac{3c}{4d} + 五差\frac{11c}{14d} + 六差\frac{13c}{16d} + \cdots \qquad ③$$

ここで設問の径１尺（10 寸）、大矢１寸を用いて甲矢 c_1 の数値を次のように求めている。

甲矢 c_1 （原数から七差までの和）＝0.25658350968780

（３）乙矢以降を求める

乙矢 c_2 は、①の c_1 の代わりに c_2 とし、c の代わりに c_1 を用いる。次式である。

$$c_2^2 - dc_2 + \left(\frac{cd}{16} + \frac{c^2}{64} + \frac{c^3}{128d} + \frac{5c^4}{1024d^2} + \frac{7c^5}{2048d^3} + \frac{21c^6}{8192d^4} + \frac{33c^7}{16384d^5} + \frac{429c^8}{262144d^6}\right) = 0 \qquad ④$$

このの c_2 について c_1 と同じように級数で第八商まで求めている（間違いは見つからない）。

$$c_2=\frac{c}{16}+\frac{5c^2}{256d}+\frac{21c^3}{2048d^2}+\frac{429c^4}{65536d^3}+\frac{2431c^5}{524288d^4}+\frac{29393c^6}{8388608d^5}+\frac{185725c^7}{67108864d^6}+\frac{9694845c^8}{4294967296d^7}+\cdots \quad ⑤$$

$$=原数+原数\frac{5c}{16d}+一差\frac{21c}{40d}+二差\frac{143c}{224d}+三差\frac{17c}{24d}+四差\frac{133c}{176d}+五差\frac{575c}{728d}+六差\frac{261c}{320d}+\cdots \quad ⑥$$

乙矢 c_2 =0.06456271181072

同様に丙矢 c_3 、丁矢 c_4、戊矢 c_5 についても同じように求めているが、大変な計算量である。結果のみ記すが、検証はしていない。

$$c_3=\frac{c}{64}+\frac{21c^2}{4096d}+\frac{357c^3}{131072d^2}+\frac{29325c^4}{16777216d^3}+\frac{666655c^5}{536870912d^4}+\frac{32302465c^6}{34359738368d^5}$$

$$+\frac{817500845c^7}{1099511627776d^6}+\frac{170857676605c^8}{281474976710656d^7}+\cdots$$

$$=原数+原数\frac{21c}{64d}+一差\frac{17c}{32d}+二差\frac{575c}{896d}+三差\frac{341c}{480d}+四差\frac{533c}{704d}+五差\frac{329c}{416d}+六差\frac{209c}{256d}+\cdots$$

丙矢 c_3 =0.01616681453680

$$c_4=\frac{c}{256}+\frac{85c^2}{65536d}+\frac{5797c^3}{8388608d^2}+\frac{1907213c^4}{4294967296d^3}+\frac{173556383c^5}{549755813888d^4}+\frac{33654160449c^6}{140737488355328d^5}$$

$$+\frac{3407946027885c^7}{18014398509481984d^6}+\frac{2849724468517437c^8}{18446744073709551616d^7}+\cdots$$

$$=原数+原数\frac{85c}{256d}+一差\frac{341c}{640d}+二差\frac{2303c}{3584d}+三差\frac{91c}{128d}+四差\frac{2133c}{2816d}+五差\frac{9215c}{11648d}+六差\frac{4181c}{5120d}+\cdots$$

丁矢 c_4 =0.0040433384927970

$$c_5=\frac{c}{1024}+\frac{341c^2}{1048576d}+\frac{93093c^3}{536870912d^2}+\frac{122550285c^4}{1099511627776d^3}+\frac{44616473759c^5}{562949953421312d^4}+\frac{34610215507777c^6}{576460752303423488d^5}$$

$$+\frac{14020179936958061c^7}{295147905179352825856d^6}+\frac{4689750188912471404 5c^8}{1208925819614629074706176d^7}+\cdots$$

$$=原数+原数\frac{341c}{1024d}+一差\frac{273c}{512d}+二差\frac{9215c}{14336d}+三差\frac{5461c}{7680d}+四差\frac{8533c}{11264d}+五差\frac{36863c}{46592d}+六差\frac{3345c}{4096d}+\cdots$$

戊矢 $c_5=0.001010936822524$

（４）総括

最後に「乾之巻総括」がある。初めに生率と通率の定義があるが紛らわしい部分がある（ある文献に「各矢の級数で、相隣れる逐差の比における分母、分子を除率、乗率と名づけ、これを生率といふ。その構成の法則を明らかにするため、これを整理した乗率、除率を通率といふ」とある）。

その後は矢の級数を求める一般則を述べている。

1) 倍数は２倍、加数は斜数の二乗の２倍（斜数は 2、4、8、16、32 のように倍数となっている）

2) 原数は斜数の二乗で大矢を除した数

（例： c_1の原数$1/2^2=1/4$，c_2の原数$1/4^2=1/16$，c_3の原数 $1/8^2=1/64$ ）

3) 諸斜の一差（生率の場合）は「乗率者斜数冪ノ内減一得数、除率者斜数冪三段」としている。

（例：c_1の一差生率$(2^2-1)/(2^2\times 3)=3/12$ ； c_2の一差生率$(4^2-1)/(4^2\times 3)=15/48$

；c_3の一差生率$(8^2-1)/(8^2\times 3)=63/192$ ）

4) 諸斜の二差は「二差の乗率は一差乗率を２倍し加数(2 斜の二乗の２倍)から 1 を減じたものを加える、除率は一差除率を２倍し加数から２斜の二乗の半分を減じたものを加える」（「1 を減じ」とあるが「1 を加える」としないと合わない）

（例：c_1の二差乗率$2\times 3+2\times 2^2+1=15$, 二差除率$2\times 12+2\times 2^2-0.5\times 2^2=30$ ∴ 二差生率$=15/30$

c_2の二差乗率$2\times 15+2\times 4^2+1=63$, 二差除率$2\times 48+2\times 4^2-0.5\times 4^2=120$ ∴ 二差生率$=63/120$

c_3の二差乗率 $2\times 63+2\times 8^2+1=255$, 二差除率 $2\times 192+2\times 8^2-0.5\times 8^2=480$　∴ 二差生率 $=255/480$）

5) 諸斜の三差以上は「三差以上の乗率は前差乗率を２倍し加数(その斜の二乗の２倍)から前々差乗率を減じたものを加える、除率も同様で前差除率を２倍し加数から前々差除率を減じたものを加える」（例：c_1の三差乗率 $15\times 2+2^2\times 2-3=35$，三差除率 $30\times 2+2^2\times 2-12=56$

c_2の三差乗率 $63\times 2+4^2\times 2-15=143$，三差除率 $120\times 2+4^2\times 2-48=244$

c_3の三差乗率 $255\times 2+8^2\times 2-63=575$，三差除率 $480\times 2+8^2\times 2-192=896$）

この後 2,4,8,16,32 斜（甲〜戊の矢に対応）に対する九差までの生率・通率の表（以下）を示して終わっている。

半弧中二斜矢 乃括要算法所謂四斜之勾也（甲矢）	差	一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{20}$
	通率	$\frac{3}{12}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{35}{56}$	$\frac{63}{90}$	$\frac{99}{132}$	$\frac{143}{182}$	$\frac{195}{240}$	$\frac{255}{306}$	$\frac{323}{380}$

「通率」の下に「自ラ倍シ減レ前加レ八得数」とあり。

半弧中四斜矢 乃括要算法所謂八斜之勾也（乙矢）		一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{143}{224}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{133}{176}$	$\frac{575}{728}$	$\frac{261}{320}$	$\frac{341}{408}$	$\frac{259}{304}$
	通率	$\frac{15}{48}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{143}{224}$	$\frac{255}{360}$	$\frac{399}{528}$	$\frac{575}{728}$	$\frac{783}{960}$	$\frac{1023}{1224}$	$\frac{1295}{1520}$

「通率」の下に「自倍減前加三十二」とあり。

半弧中八斜矢 乃括要算法所謂一十六斜之勾也（丙矢）		一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{21}{64}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{575}{896}$	$\frac{341}{480}$	$\frac{533}{704}$	$\frac{329}{416}$	$\frac{209}{256}$	$\frac{455}{544}$	$\frac{5183}{6080}$
	通率	$\frac{63}{192}$	$\frac{255}{480}$	$\frac{575}{896}$	$\frac{1023}{1440}$	$\frac{1599}{2112}$	$\frac{2303}{2912}$	$\frac{3135}{3840}$	$\frac{4095}{4896}$	$\frac{5183}{6080}$

「通率」の下に「自倍減前加一百二十八」とあり。

半弧中一十六斜矢 乃括要算法所謂三十二斜之勾也（丁矢）		一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{85}{256}$	$\frac{341}{640}$	$\frac{2303}{3584}$	$\frac{91}{128}$	$\frac{2133}{2816}$	$\frac{9215}{11648}$	$\frac{4181}{5120}$	$\frac{5461}{6528}$	$\frac{4147}{4864}$
	通率	$\frac{255}{768}$	$\frac{1023}{1920}$	$\frac{2303}{3584}$	$\frac{4095}{5764}$ *	$\frac{6399}{8448}$	$\frac{9215}{11648}$	$\frac{12543}{15360}$	$\frac{16383}{19584}$	$\frac{20735}{24320}$

「通率」の下に「自倍減前加五百一十二」とあり。*原文は5764とあるが5760が正しい。

半弧中三十二斜矢 乃括要算法所謂六十四斜之勾也（戊矢）		一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{341}{1024}$	$\frac{273}{512}$	$\frac{9215}{14336}$	$\frac{5461}{7680}$	$\frac{8533}{11264}$	$\frac{36863}{46592}$	$\frac{3345}{4096}$	$\frac{1285}{1536}$	$\frac{82943}{97280}$
	通率	$\frac{1023}{3072}$	$\frac{4095}{7680}$	$\frac{9215}{14336}$	$\frac{16383}{23040}$	$\frac{25599}{33792}$	$\frac{36863}{46592}$	$\frac{50175}{61440}$	$\frac{65535}{78336}$	$\frac{82943}{97280}$

「通率」の下に「自倍減前加二千〇四十八」とあり。

学習院大学の「乾坤之巻（弧背真術）」の坤之巻(61、81 号参照)

巻首の文中に「關夫子斜数ヲ用ヒズ自然ト乗除率ノ数ヲ求メンｺﾄヲ工夫シテ」とあり、「乾坤之巻」は関孝和の著述であるかのように言っているが、勿論そのような評価は今はない。

続いて矢の級数展開の各項の係数についての記述がある。まず、二斜から三十二斜の一差から七差までの通率の値の表１を掲げる。この値に対して「各乗率に１を加え除率はそのままにしたものを実とし、各分母分子を斜数冪で除して乗率除率を得て」として表２を掲げる。この値は斜を増やしたときの収束値を示している。

表 1

		半弧中二斜	半弧中四斜	半弧中八斜	半弧中十六斜	半弧中三十二斜
一差	乗率	3	15	63	255	1023
	除率	12	48	192	768	3072
二差	乗率	15	63	255	1023	4095
	除率	30	120	480	1920	7680
三差	乗率	35	143	575	2303	9215
	除率	56	224	896	3584	14336
四差	乗率	63	255	1023	4095	16383
	除率	90	360	1440	5760	23040
五差	乗率	99	399	1599	6399	25599
	除率	132	528	2112	8448	33792
六差	乗率	143	575	2303	9215	36863
	除率	182	728	2912	11648	46592
七差	乗率	195	783	3135	12543	50175
	除率	240	960	3840	15360	61440

表２

斜数各半弧中之数後倣之		二斜	四斜	八斜	十六斜	三十二斜
一差	乗率	1	1	1	1	1
	除率	3	3	3	3	3
二差	乗率	4	4	4	4	4
	除率	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5
三差	乗率	9	9	9	9	9
	除率	14	14	14	14	14
四差	乗率	16	16	16	16	16
	除率	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5
五差	乗率	25	25	25	25	25
	除率	33	33	33	33	33
六差	乗率	36	36	36	36	36
	除率	45.5	45.5	45.5	45.5	45.5
七差	乗率	49	49	49	49	49
	除率	60	60	60	60	60

表２から一般式として乗率が m^2 で、除率が $(2m+1)(m+1)\times 0.5=\{(2m+3)m+1\}\times 0.5$（招差積）導出している。また表１からは乗率が $(m^2\cdot 2^{2n}-1)$ 、除率が $2^{2n}(2m+1)(m+1)\times 0.5=2^{2n}\{(2m+3)m+1\}\times 0.5$ を導出している。

ここで第数を m (m差のこと)、斜数を 2^n としている。

この後、矢の一般式を次のように述べている。

$$c_n=\frac{大矢}{斜数冪}+\frac{大矢冪\cdot一差乗率}{斜数冪\cdot径\cdot一差除率}+\frac{大矢再\cdot一差乗率\cdot二差乗率}{斜数冪\cdot径冪\cdot一差除率\cdot二差除率}+\cdots$$

$$=\frac{c}{2^{2n}}+原数\frac{一差乗率}{一差除率}\frac{c}{d}+一差\frac{二差乗率}{二差除率}\frac{c}{d}+二差\frac{三差乗率}{三差除率}\frac{c}{d}+\cdots \qquad ⑦$$

$$\left(=\frac{c}{2^{2n}}+\sum(m-1)差\cdot\frac{2(m^2\cdot 2^{2n}-1)}{2^{2n}(2m+1)(m+1)}\cdot\frac{c}{d}\right) \qquad ⑧$$

そして全弧汎背冪 s_{n+1} を次のように求めている。

$$s_{n+1}^2=\frac{大矢\cdot径\cdot斜数冪\cdot4}{斜数冪}+\frac{大矢冪\cdot一ノ乗率\cdot斜数冪\cdot4}{斜数冪\cdot一ノ除率}+\frac{大矢再\cdot一ノ乗率\cdot二ノ乗率\cdot斜数冪\cdot4}{斜数冪\cdot一ノ除率\cdot二ノ除率\cdot径}+\cdots$$

$$=4cd+原数\frac{一ノ乗率}{一ノ除率}\frac{c}{d}+一差\frac{二ノ乗率}{二ノ除率}\frac{c}{d}+二差\frac{三ノ乗率}{三ノ除率}\frac{c}{d}+\cdots \qquad ⑨$$

これは以下と同じことを意味する。

$$s_{n+1}^2=2^{2n+2}c_nd=2^{2n+2}d\left\{\frac{c}{2^{2n}}+\sum(m-1)差\cdot\frac{2(m^2\cdot 2^{2n}-1)}{2^{2n}(2m+1)(m+1)}\cdot\frac{c}{d}\right\}$$

$$=4cd+\sum(m-1)差\cdot\left(m^2-\frac{1}{2^{2n}}\right)\frac{2}{(2m+1)(m+1)}\cdot\frac{c}{d} \qquad ⑩$$

　ここで、「$1/2^{2n}$」について本文は「斜数至テ多キトキハ此数至テ微ナリ故ニ斜数ノ多極数ヲ幽ク(フカ)捜テ(サクリ)此数ヲ消シ斜数ヲ離レテ真背ノ乗除率ヲ求ム如後条」と注釈し、その後続けて、「右斜数冪多極数ヲ増約シテ乗率ノ内、$-1/$斜数冪$(=-1/2^{2n})$ 此数ヲ消シテ真背乗除率ヲ得ル如左」といっている。これは重要な部分で、$n\to\infty$ とすれば $1/2^{2n}\to 0$ となることを言っていて、そのことにより真背（定背）が求まるとしている。分母分子を斜数冪で除せば次の演算となる。

　従って、⑨⑩式を参考にすれば弧背真術は次式となるが、これらの式は原文には書いてない。ただ、⑬式の係数値が 30 差まで記述されているのみである。

$$s^2=4cd+\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)差\cdot\frac{m^2}{\{(2m+3)m+1\}\times 0.5}\cdot\frac{c}{d} \qquad ⑪$$

$$=4cd+\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)差\cdot\frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m+2)}\cdot\frac{c}{d} \qquad ⑫$$

$$=4cd+原数\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{d}+一差\frac{4}{7.5}\cdot\frac{c}{d}+二差\frac{9}{14}\cdot\frac{c}{d}+三差\frac{16}{22.5}\cdot\frac{c}{d}+\cdots \qquad ⑬$$

$$=4cd+原数\frac{2^2}{3\cdot4}\cdot\frac{c}{d}+一差\frac{4^2}{5\cdot6}\cdot\frac{c}{d}+二差\frac{6^2}{7\cdot8}\cdot\frac{c}{d}+三差\frac{8^2}{9\cdot10}\cdot\frac{c}{d}+\cdots \qquad ⑭$$

編集後記

乾坤之巻（円理乾坤之巻とも）は関流の最秘伝の書といわれ、それだけに後の和算家に大きな影響を与えてきた。著者・年記とも無く不明だが、「乾坤之巻は建部賢弘の綴術算経と円理綴術（円理弧背術のこと）の結果を敷衍(ふえん)して、松永良弼が編纂したもの」、「円理乾坤之巻は円理弧背術を完たからしめたるものなり」(平山諦)といわれる。$(\arcsin x)^2$ のべき級数展開に相当する式を説明している。

江戸時代の無限級数展開は『綴術算経』(建部賢弘)に始まり、『円理弧背術』、『乾坤之巻』と進化してきた。実力もわきまえず後二者の解読を試みてきたのは、上里出身の今井兼庭も『円理弧背術』を著していることが一つの理由。

これを書いている日の午前中は飯能の多峯主山に行き、帰りの車中で安倍元首相が銃撃されたニュースを聞いた。あってはならない事件がまた起きた。

多峯主(とうのす)の信仰厚し雨乞池