やまぶき 4
田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

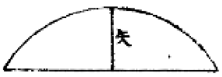
第82号　令和四年（二〇二二）七月一日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三～二一～二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき 和算と歴史随想」

今井兼庭「円理弧背術」の応用問題を解く(2)

前号の続きで２問目です。

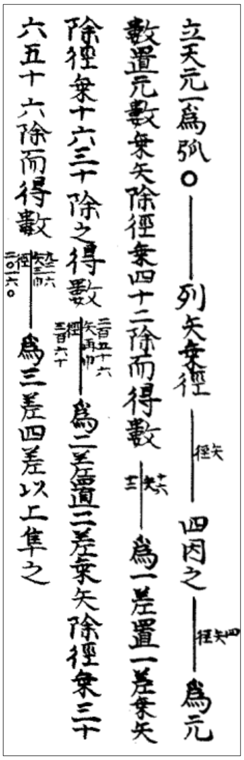
(2) 弧背冪 s^2 から弧背 s を求める

s^2 から s を求めるもので、原文は次のようにある。



今有弧形矢一寸圓一尺問弧幾何
答云
解曰　天元術中所用ノ弧術者徑矢得弧冪之術ナリ

とした上で、右図のようにある。


立天元一為弧○——列矢乗徑——四因之——為元
數置元數乗矢除徑乗四十二除而得數——為一差置一差乗矢
除徑乗十六三十除之得數——為二差置二差乗矢除徑乗三十
六五十六除而得數——為三差四差以上準之

これは次のように表せるが、前回の③と同等である。

$$s^2 = 4cd + 元数\frac{4}{12}\frac{c}{d} + 一差\frac{16}{30}\frac{c}{d} + 二差\frac{36}{56}\frac{c}{d} + \cdots$$

$$= 4cd + \frac{16c^2}{12} + \frac{256c^3}{360d} + \frac{9216c^4}{20160d^2} + \cdots$$

$$= 4cd + \frac{4c^2}{3} + \frac{32c^3}{45d} + \frac{16c^4}{35d^2} + \cdots \qquad ⑥$$

これを４項までの次のような s の二次式として解いている（一次項はなし）。

$$s^2 - \left(4cd + \frac{4c^2}{3} + \frac{32c^3}{45d} + \frac{16c^4}{35d^2}\right) = 0 \qquad ⑦$$

この後、「右所得式如常平方開之如左」とあるが、解き方は組立除法と同じ解き方である。

いま、組立除法による解法の一部を示せば次のようなものである。

一商は $s^2 - 4cd = 0$ から $2\sqrt{cd}$ とする。

商	廉級	方級	実級
$2\sqrt{cd}$	1	0	$-4cd - \frac{4}{3}c^2 - \frac{32}{45d}c^3 - \frac{16}{35d^2}c^4$
		$2\sqrt{cd}$	$4cd$
	1	$2\sqrt{cd}$	$-\frac{4}{3}c^2 - \frac{32}{45d}c^3 - \frac{16}{35d^2}c^4$
		$2\sqrt{cd}$	
	1	$4\sqrt{cd}$	

二商は $\frac{1}{4\sqrt{cd}}\frac{4c^2}{3} = \frac{c\sqrt{cd}}{3d} = 2\sqrt{cd}\frac{1}{6}\left(\frac{c}{d}\right)$

$\frac{c\sqrt{cd}}{3d}$	1	$4\sqrt{cd}$	$-\frac{4}{3}c^2-\frac{32}{45d}c^3-\frac{16}{35d^2}c^4$
		$\frac{c\sqrt{cd}}{3d}$	$\frac{c\sqrt{cd}}{3d}\left(4\sqrt{cd}+\frac{c\sqrt{cd}}{3d}\right)=\frac{4c^2}{3}+\frac{c^3}{9d}$
	1	$4\sqrt{cd}+\frac{c\sqrt{cd}}{3d}$	$-\frac{27}{45d}c^3-\frac{16}{35d^2}c^4$
		$\frac{c\sqrt{cd}}{3d}$	
	1	$4\sqrt{cd}+\frac{2c\sqrt{cd}}{3d}$	

三商は$\frac{1}{4\sqrt{cd}}\frac{27c^3}{45d}=\frac{3\sqrt{cd}c^2}{20d^2}=2\sqrt{cd}\frac{3}{40}\left(\frac{c}{d}\right)^2$

従って求めるものは次のようになる。

$$s=2\sqrt{cd}+2\sqrt{cd}\frac{1}{6}\left(\frac{c}{d}\right)+2\sqrt{cd}\frac{3}{40}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\cdots$$
$$=2\sqrt{cd}\left\{1+\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{3^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\cdots\right\}$$

原文は結論を「解題本術」として次のように述べている。

術曰徑矢相乗四因平方開見商為元数置元数乗矢除徑一乗六除
為一差置一差乗矢除徑九乗二十除而為二差置二差乗矢除徑二十五乗
四十二除而為三差末倣之得数元数及一差二差三差各相併テ得数為弧合問

これを解読すれば次の式である。

$$s=\sqrt{4cd}+\sqrt{4cd}\frac{c}{d}\frac{1}{6}+\sqrt{4cd}\frac{c}{6d}\frac{c}{d}\frac{9}{20}+\sqrt{4cd}\frac{9c^2}{120d^2}\frac{c}{d}\frac{25}{42}+\cdots$$
$$=2\sqrt{cd}\left\{1+\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{3^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{3^2\cdot 5^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\cdots\right\} \quad ⑧$$

なお、次のテーラー展開を用いても求まる。

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\frac{7x^5}{256}-\cdots$$

だから、⑦を次のように変形する。

$$s^2=4cd\left(1-\frac{A}{4cd}\right)=4cd(1-B)\ ,\ s=2\sqrt{cd}\sqrt{1-B}$$
$$A=-\left(\frac{4c^2}{3}+\frac{32c^3}{45d}+\frac{16c^4}{35d^2}\right)\ ,\ B=\frac{A}{4cd}$$

そうすると、

$$\sqrt{1-B}=1-\frac{B}{2}-\frac{B^2}{8}-\frac{B^3}{16}-\frac{5B^4}{128}-\cdots$$

３乗までで計算すれば次のようになる。

$$\frac{B}{2}=\frac{A}{8cd}=-\frac{1}{8cd}\left(\frac{4c^2}{3}+\frac{32c^3}{45d}+\frac{16c^4}{35d^2}\right)=-\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{4}{45}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{2}{35}\left(\frac{c}{d}\right)^3\right\}$$

$$\frac{B^3}{16}=\frac{1}{16}\left(\frac{A}{4cd}\right)^3=\frac{1}{1024c^3d^3}\left(\frac{4c^2}{3}+\frac{32c^3}{45d}+\frac{16c^4}{35d^2}\right)^3=-\frac{1}{432}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\cdots$$

従って

$$s=2\sqrt{cd}\left\{1+\frac{1}{6}\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{4}{45}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{2}{35}\left(\frac{c}{d}\right)^3-\frac{1}{72}\left(\frac{c}{d}\right)^2-\frac{2}{135}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\frac{1}{432}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=2\sqrt{cd}\left\{1+\frac{1}{6}\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{9}{120}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{225}{5040}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=2\sqrt{cd}\left\{1+\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{c}{d}\right)+\frac{3^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\left(\frac{c}{d}\right)^2+\frac{3^2\cdot 5^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\left(\frac{c}{d}\right)^3+\cdots\right\}$$

＝＝

「新発見の埼玉の算額について」を読んで

五月に、松本登志雄さんの表題の文献を見ました。『和算研究所紀要』（№17、2020年3月）に掲載されているものです。この雑誌は入手が難しいので、他の文献調査と一緒に国会図書館で拝見しました。

昭和44年の『埼玉の算額』刊行以後に発見された26面の算額がコンパクトにまとめられていて貴重な資料です。

その半数は承知済みでしたが、残り半数は内容不明、或いは存在そのものを知りませんでした。その内、深谷市山河の伊奈利（稲荷）大神社の算額（円周率などが書いてあるというのはわかっていました）は見学に行きましたが、見つかりませんでした。その時のことは32号に書きました。いま資料から転記させて頂きます（一部文字が欠けている様です）。

奉　献

大　数

一十百千萬億兆京垓秭

壌溝澗正載極恒河沙阿僧祇

那由他不可思議無量大数

小　数

分厘毫絲忽微繊沙塵埃

定

平　円

積率七分五　法也

円率三箇

積率七分九

周率三箇一六　法也

玄　曰

積率七分八五三九八一　三九七四四八

周率三箇一四一五九二六五三五八九七九三

立　円

積率五分二三五九八七七二〇九八二九八

三　角

角中径率五分七七三五〇二六九

平中径率二分八八六七五一三四

中勾率八分六六〇二五四

積率四分三三〇一二七〇一

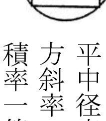
四　角

角中径率七分〇七一〇六七八一

平中径率五分

方斜率一箇四一四二一三五

積率一箇



五　角

角中径率八分五〇六五〇八〇八

平中径率六分八八一九〇九六

積率一箇七二〇四七七四

容率五分八七七

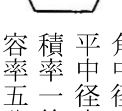
六　角

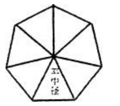
角中径率八分五〇六五〇八〇八

平中径率六分八八一九〇九六

積率一箇七二〇四七七四

容率五分八七七





七　角
角中径率一箇一五二三八二四三五
平中径率一箇〇三八二六〇六九八
積率三箇六三三九一二四四四
容率四分三
八　角
角中径率一箇三〇六五六二九六四
平中径率一箇二〇七一〇六七八一
積率四箇八二八四二七一二四
容率三分八二六八
九　角
角中径率一箇四六一九〇二二
平中径率一箇三七三七三八七〇九
積率六箇一八一八二四一九三
容率三分四二〇
十　角
角中径率一箇六一八〇三三九八八
平中径率一箇五三八八四一七六八
（略）
二十角
角中径率三箇一九六二二六六一
平中径率三箇一五六八七五七五七
積率三十一箇五六八七五七五七三
二千人ニ配
六塵
維持明治四十四年第十月祥日
當所　松本源七
敬
徹星樹崎景

この他に、所沢市上山口の金乗院に奉額年不明の算額が紹介されていますが、既に劣化で全文が書き写せなかったのか欠字があるようです。金乗院（山口観音）には埼玉最古の算額がありますが（38号参照）、別にもう一つあったようです。

綴術算経と徳川吉宗

建部賢弘は享保七年（一七二二）孟春、『綴術算経』を将軍吉宗に献上しました。この書は数学の方法論の書ともいわれます。探法則，探術理，探員数の三章に分け，各章を四〜に分けて解説しています。綴術とは帰納法（文とで，帰納法こそ数学の問題を考える基跋していています。

探員数の個所では、円弧の長さの二乗を直径と弓形の高さとで表す無限級数を、まさに帰納法で求めています。これは $(\arcsin x)^2$ の展開と同じものであるとして有名です。

この『綴術算経』を吉宗は大奥でみていたということを知りました。以下は参考文献に挙げた資料の中に出て来る内容の要約です。

宝暦元年（一七五一）、将軍吉宗が亡くなると、吉宗に仕えていた源政武は吉宗の人柄や事蹟逸話などを伝えるために『仰高録』を著した。その中に

尤其筋御書籍の事ハ一々不及記、奥御書物之内にても天経或問、算法統宗、算学啓蒙、綴術算経、竿頭算法、両儀集説、天文議論、右旋辨論、虞書暦象洛翁などといへる書ハ平日御傍にみへたり

と書き、漢籍や和書などの様々な暦算書が吉宗のプライベートな空間である大奥に持ちこまれていた、と伝えているのである。大奥での吉宗の勉学ぶりを伝えていて、大変興味深い記述になっている。

参考文献：小林龍彦「三人の徳川将軍に仕えた暦算家建部賢弘」（和算研究所紀要No 15、2015年）

編集後記

前号に続いて今井兼庭の「円理弧背術」の応用問題を載せました。前号とは一心同体みたいなものです。数問残ってますがひとまず終りにします。

『和算研究所紀要』には貴重な資料が掲載されているようですが、どこで入手できるのかわからず、仕方なく国会図書館に行きました。五月のことでしたが、久しぶりの都内なので、桜田門や皇居を少し散歩しました。

万緑や調査帰りの二重橋