やまぶき4
田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）
第81号　令和四年（二〇二二）六月二七日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三～二一～二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき　和算と歴史随想」

今井兼庭「円理弧背術」の応用問題を解く

もう１年も前になりますが、77、78 号で『今井兼庭の「円理弧背術」を学ぶ』と題して解読を行って来ましたが、「応用問題」とでも呼ぶものは未対応のままでした。この応用問題は「円理弧背術」の最後にあるもので６問ありますが、１問目は矢と径から弧背を求めるもので、「円理弧背術」のそもそもの課題たる弧背の冪乗の式として得ているもの（下の①式）ですから、問題としては除外できます。残り５問のうち２問について述べます（２問のうち１問目は今号、２問目は次号の予定)。

なお、これらの応用問題については 25、32 号でも少し述べてますが、それらは題意と解答結果のみで、解答方法は述べていませんでした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$s^2 = 4cd + \text{原数}\frac{2^2}{3\cdot 4}\frac{c}{d} + \text{一差}\frac{4^2}{5\cdot 6}\frac{c}{d} + \text{二差}\frac{6^2}{7\cdot 8}\frac{c}{d} + \text{三差}\frac{8^2}{9\cdot 10}\frac{c}{d} + \cdots \quad ①$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

(1) 弧 s と径 d とから矢 c を求める

假令有弧形弧若干圓徑若干問矢幾何

答曰矢

術曰置弧冪以円径四段除之為正元数乗弧冪除徑冪三除四除而為一差置一差負乗弧冪除徑冪五除六除而為二差正置二差乗弧冪除徑冪七除八除而為三差負置三差乗弧冪除徑冪九除一十除而為四差正置四差乗弧冪除徑冪一十一除一十二除而為五差負末倣之列正差相併得数加元数得内減負差相併得数余為矢合問

読み下しは省略するが、これは弧 s と径 d から矢 c を求めるもので、その結論は次の②のような式になる。この結果は松永良弼が『方円算経』（元文４年(1739)）の中で求めていたものと同じであるが、元文４年に松永良弼凡そ 47 歳、兼庭 21 歳程だから、松永の方が早く求めていた可能性がある。

$$\text{元数} = \frac{s^2}{4d},\ \text{一差} = \text{元数}\frac{s^2}{3\cdot 4d^2},\ \text{二差} = \text{一差}\frac{s^2}{5\cdot 6d^2},\ \text{三差} = \text{二差}\frac{s^2}{7\cdot 8d^2},$$

$$\text{四差} = \text{三差}\frac{s^2}{9\cdot 10d^2},\ \text{五差} = \text{四差}\frac{s^2}{11\cdot 12d^2},\cdots \quad \text{として}$$

$$c = \text{元数} - \text{一差} + \text{二差} - \text{三差} + \text{四差} - \text{五差} + \cdots$$

$$= \frac{s^2}{4d}\left\{1 - \frac{1}{3\cdot 4}\left(\frac{s}{d}\right)^2 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{s}{d}\right)^4 - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{s}{d}\right)^6 + \cdots\right\} \qquad ②$$

この解法について、先ず①式を次のように変形している。②の係数を計算すると、②は次のようになる。

$$s^2 = 4dc + \frac{4}{3}c^2 + \frac{32}{45d}c^3 + \frac{16}{35d^2}c^4 + \frac{512}{1575d^3}c^5 + \cdots \qquad ③$$

これをc^4までで考え、次のようにc の４次方程式とする。

$$\frac{16}{35d^2}c^4 + \frac{32}{45d}c^3 + \frac{4}{3}c^2 + 4dc - s^2 = 0 \qquad ④$$

ここで、定数項を実級、１次から４次までの係数をそれぞれ方級、廉級、偶級、三乗級と呼び、この４次方程式を反転してd とs でc を得る級数展開を求めている。『増修 日本数学史』は、「この級数（③式）を径と矢の無限次方程式と考えて、これを反転して径と弧背で矢を得る級数展開式を得ている」とある。

解法の原文は先ず次のようにある。

如常三乗方開之得式如左
以方級円径四段除實級得一ノ商、以乗三乗級加隅級以乗一ノ商加
廉級以乗一商加方級以乗一ノ商加實級。列三乗級乗一ノ商加隅級
以乗一ノ商加廉級以乗一ノ商加方級。列三乗級乗一商加隅級以乗
一ノ商加廉級。列三乗級乗一ノ商加隅級止ム

組立除法に則ったこの部分の解読は可能だが、続く傍書法の記述による一商から二商、二商から三商などへの展開を具体的に解読するのは難しい。よってここでは組立除法による級数展開を具体的に計算したので、それを示すことで代替えとしたい。

いま、④式を組立除法の級数展開で求めると次のようになる。商の立て方や演算については、附録の「組立除法」を参照にする。

一商（初商）は実級を方級で除して$s^2/4d$ を得る（負号は無視）。一商を得てからの組立除法を表１に示す。その結果第一変式は次のようになる。

$$\frac{16}{35d^2}c^4 + \left(\frac{32}{45d} + \frac{32s^2}{140d^3}\right)c^3 + \left(\frac{4}{3} + \frac{64s^2}{180d^2} + \frac{48s^4}{560d^4}\right)c^2 + \left(4d + \frac{8s^2}{12d} + \frac{96s^4}{720d^3} + \frac{64s^6}{2240d^5}\right)c$$
$$+ \left(\frac{4s^4}{48d^2} + \frac{32s^6}{2880d^4} + \frac{16s^8}{8960d^6}\right) = 0$$

これから、二商は$(-4s^4/48d^2) \div 4d = -s^4/48d^3$ となる。負号は$4s^4/48d^2$ を消すために付ける。二商を得てからの組立除法を表２に示す。

表２から三商は$(s^6/360d^4) \div 4d = s^6/1440d^5$ と求められる。

この結果から

$$c = \frac{s^2}{4d} - \frac{s^4}{48d^3} + \frac{s^6}{1440d^5} \cdots = \frac{s^2}{4d}\left\{1 - \frac{1}{3\cdot4}\left(\frac{s}{d}\right)^2 + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(\frac{s}{d}\right)^4 \cdots\right\}$$

を得る。

一商	三乗級	偶級	廉級	方級	実級
$\frac{s^2}{4d}$	$\frac{16}{35d^2}$	$\frac{32}{45d}$	$\frac{4}{3}$	$4d$	$-s^2$
		$\frac{16s^2}{140d^3}$	$\frac{32s^2}{180d^2}+\frac{16s^4}{560d^4}$	$\frac{4s^2}{12d}+\frac{32s^4}{720d^3}+\frac{16s^6}{2240d^5}$	$s^2+\frac{4s^4}{48d^2}+\frac{32s^6}{2880d^4}+\frac{16s^8}{8960d^6}$
	$\frac{16}{35d^2}$	$\frac{32}{45d}+\frac{16s^2}{140d^3}$	$\frac{4}{3}+\frac{32s^2}{180d^2}+\frac{16s^4}{560d^4}$	$4d+\frac{4s^2}{12d}+\frac{32s^4}{720d^3}+\frac{16s^6}{2240d^5}$	$\frac{4s^4}{48d^2}+\frac{32s^6}{2880d^4}+\frac{16s^8}{8960d^6}$
		$\frac{16s^2}{140d^3}$	$\frac{32s^2}{180d^2}+\frac{32s^4}{560d^4}$	$\frac{4s^2}{12d}+\frac{64s^4}{720d^3}+\frac{48s^6}{2240d^5}$	
	$\frac{16}{35d^2}$	$\frac{32}{45d}+\frac{32s^2}{140d^3}$	$\frac{4}{3}+\frac{64s^2}{180d^2}+\frac{48s^4}{560d^4}$	$4d+\frac{8s^2}{12d}+\frac{96s^4}{720d^3}+\frac{64s^6}{2240d^5}$	

表１（一商による組立除法）

二商	三乗級	偶級	廉級	方級	実級
$-\frac{s^4}{48d^3}$	$\frac{16}{35d^2}$	$\frac{32}{45d}+\frac{32s^2}{140d^3}$	$\frac{4}{3}+\frac{64s^2}{180d^2}+\frac{48s^4}{560d^4}$	$4d+\frac{8s^2}{12d}+\frac{96s^4}{720d^3}+\frac{64s^6}{2240d^5}$	$\frac{4s^4}{48d^2}+\frac{32s^6}{2880d^4}+\frac{16s^8}{8960d^6}$
		$-\frac{16s^4}{1680d^5}$	$-\frac{32s^4}{2160d^4}-\frac{32s^6}{6720d^6}+\frac{16s^8}{80640d^8}$	$-\frac{4s^4}{144d^3}-\frac{64s^6}{8640d^5}-\frac{67s^8}{45360d^7}+\cdots$	$-\frac{4s^4}{48d^2}-\frac{8s^6}{576d^4}-\frac{57s^8}{25920d^6}\cdots$
	$\frac{16}{35d^2}$	$\frac{32}{45d}+\frac{32s^2}{140d^3}-\frac{16s^4}{1680d^5}$	$\frac{4}{3}+\frac{64s^2}{180d^2}+\frac{67s^4}{945d^4}-\frac{32s^6}{6720d^6}+\frac{16s^8}{80640d^8}$	$4d+\frac{8s^2}{12d}+\frac{57s^4}{540d^3}+\cdots$	$-\frac{s^6}{360d^4}-\frac{5s^8}{12096d^6}\cdots$
		$-\frac{16s^4}{1680d^5}$	$-\frac{32s^4}{2160d^4}-\frac{32s^6}{6720d^6}+\frac{32s^8}{80640d^8}$	$-\frac{4s^4}{144d^3}-\frac{64s^6}{8640d^5}-\cdots$	
	$\frac{16}{35d^2}$	$\frac{32}{45d}+\frac{32s^2}{140d^3}-\frac{32s^4}{1680d^5}$	$\frac{4}{3}+\frac{64s^2}{180d^2}+\frac{1431s^4}{25515d^4}$	$4d+\frac{8s^2}{12d}+\frac{504s^4}{6480d^3}+\cdots$	

表２（二商による組立除法）

なお、級数の反転は次のようにも求められる。

②から c を求める式を次のように定義する。$S=s^2$ とすれば、

$$c=A_1S+A_2S^2+A_3S^3+A_4S^4+\cdots=A_1s^2+A_2s^4+A_3s^6+A_4s^8+\cdots \qquad ⑤$$

⑤に②を代入する。（計算が大変なので A_3 まで求める）

$$c=A_1\left(4dc+\frac{4}{3}c^2+\frac{32}{45d}c^3\right)+A_2\left(4dc+\frac{4}{3}c^2+\frac{32}{45d}c^3\right)^2+A_3\left(4dc+\frac{4}{3}c^2+\frac{32}{45d}c^3\right)^3+\cdots$$

$$=A_14dc+\left(\frac{4A_1}{3}+16A_2d^2\right)c^2+\left(\frac{32A_1}{45d}+\frac{32A_2d}{3}+64A_3d^3\right)c^3+\cdots$$

ここで、$A_14d=1$ だから、$A_1=\frac{1}{4d}$

$\frac{4A_1}{3}+16A_2d^2=0$ だから、$A_2=-\frac{1}{48d^3}=-\frac{1}{4\cdot3\cdot4d^3}$

$\frac{32A_1}{45d}+\frac{32A_2d}{3}+64A_3d^3=0$ だから、$A_3=\frac{1}{1440d^5}=\frac{1}{4\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6d^5}$

従って次のように②と同一のものが得られる。

$$c=\frac{s^2}{4d}\left\{1-\frac{1}{3\cdot4}\left(\frac{s}{d}\right)^2+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(\frac{s}{d}\right)^4-\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}\left(\frac{s}{d}\right)^6+\cdots\right\}$$

参考文献

加藤平左エ門『和算の研究　方程式論』（丸善　昭和 32 年）P466～

学習院大学の乾坤之巻

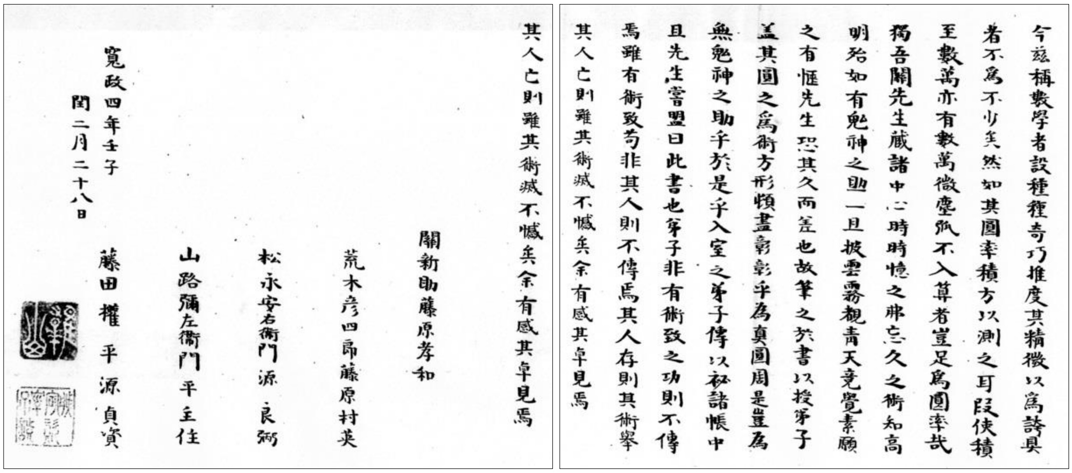
去る四月二七日に学習院大学に行き、マイクロフィルムの「乾坤之巻」を見に行き、コピーもしてきました。実は遡ること二月二一日にも行きましたが、この時は機械の調子が悪く、良く見えないしコピーも殆どピンボケでした。担当の女性が修理依頼するというので、直る頃を見計らっての再度の訪問でした。

学習院大学の「乾坤之巻」については61号で既に少し記しています。

日本学士院にも「乾坤之巻」があります（学士院のＨＰで見られます）。大正七年に貞資の子孫より貞資関係の一連の資料が寄贈され平成五年に重要文化財に指定されましたが、「乾坤之巻」（坤之巻を欠く）はその一つです。

私は学士院の「乾之巻」は解読済みなので、学習院の「弧背真術　乾巻」と比べてみたところ、改行個所まで含めてほとんど同文であることを確認しました。が、字体は異なるように思えました。

この結果、欠けている「学士院の坤之巻」は、「学習院の坤巻」と同文ではないかと考えて解読に挑戦しました。本文は大体解読し、理解出来たように思えましたが、跋文が難しくまだ解読できていません。


今茲稱數學者設種種奇巧推度其精微以爲誇昊
者不爲不少矣然如其圓率積方以測之耳段俠積
至數萬亦有數萬微塵飛不入算者豈足爲圓率哉
獨吾關先生蔵諸中心時時憶之弗忘久之術知高
明殆如有鬼神之助一旦披雲霧覩青天竟覺素願
之有恆先生恐其久而差也故筆之於書以授弟子
蓋其圓之爲術方形頃盡彰彰乎爲眞圓周是豈爲
無鬼神之助乎於是乎入室之弟子傳以秘諸帳中
且先生嘗盟曰此書也弟子非有術致之功則不傳
焉雖有術致苟非其人則不傳焉其人存則其術擧
其人亡則雖其術滅不憾矣余有感其卓見焉

其人亡則雖其術滅不憾矣余有感其卓見焉
關新助藤原孝和
荒木彦四郎藤原村英
松永安右衛門源良弼
山路彌左衛門平主住
寛政四年壬子
閏二月二十八日
藤田權平源貞資

跋文

編集後記

半年振りの「やまぶき」。71号から78号にかけて多くの頁を割いて、建部賢弘と今井兼庭の「円理弧背術」を記して来ましたが、学ぶに連れて必然的に「乾坤之巻」にも興味を持ち、ささやかな解読を試みてきました。解読してきたのは、「円理発起」、「乾坤之巻（日本学士院）」、「乾坤之巻（学習院大）」、「戸板所伝円理乾坤之巻（東北大）」、「弧背之理（東北大）」などですが、「円理弧背術」との関係などにも興味が湧きました。

これらの解読結果は可なり重複もありますが円理弧背術の解読と共に冊子にしたいと思います。ただ加齢に伴い理解力や文章力、体力など様々な能力が落ちてきて完成までには未だく時間がかかりそうです。

話は変わります。岸田首相が盛んにいう「防衛力の抜本的強化」は敵基地攻撃能力（反撃能力）や防衛予算の倍額などを指しますが、懸念を示さずにはいられません。反撃能力には先制攻撃も含まれるとも言われ、また予算も毎年一兆円の増で五年で倍増するなら、周辺国へ警戒を抱かせるとともに、軍事国家への道を確実に進むことになりはしないか。戦後77年で大きな節目になろうとしています。それで良いのだろうかと思います。

マリウポリの捕虜の行く末憂ふ夏