やまぶき 4
田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）
第78号　令和三年（二〇二一）六月六日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三~二一~二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき 和算と歴史随想」

今井兼庭の「円理弧背術」を学ぶ（２）

今井兼庭は最後に次式を求めています。(⑫式参照)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$s^2 = 4cd + 一差\frac{2^2}{3\cdot 4}\frac{c}{d} + 二差\frac{4^2}{5\cdot 6}\frac{c}{d} + 三差\frac{6^2}{7\cdot 8}\frac{c}{d} + 四差\frac{8^2}{9\cdot 10}\frac{c}{d} + \cdots$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

７．汎背冪を求める(続き)

前号で、弧の取り方を順次前の弧の半分として、$s_i^2 = 16c_{i+1}d$ の形で統一的に汎背冪として求めていることを述べた。この各汎背冪の値を具体的に求めたものが表１である。

	一商	二商	三商	四商	五商	
原汎背冪 $s_0{}^2 = 16c_1d$	$\frac{1\cdot 16cd}{4}$	$\frac{3c}{12d}$	$\frac{15c}{30d}$	$\frac{35c}{56d}$	$\frac{63c}{90d}$	甲矢
甲汎背冪 $s_1{}^2 = 16c_2d$	$\frac{1\cdot 16cd}{16}$	$\frac{15c}{48d}$	$\frac{63c}{120d}$	$\frac{143c}{224d}$	$\frac{255c}{360d}$	乙矢
乙汎背冪 $s_2{}^2 = 16c_3d$	$\frac{1\cdot 16cd}{64}$	$\frac{63c}{192d}$	$\frac{255c}{480d}$	$\frac{575c}{896d}$	$\frac{1023c}{1440d}$	丙矢
丙汎背冪 $s_3{}^2 = 16c_4d$	$\frac{1\cdot 16cd}{256}$	$\frac{255c}{768d}$	$\frac{1023c}{1920d}$	$\frac{2303c}{3584d}$	$\frac{4095c}{5760d}$	丁矢
丁汎背冪 $s_4{}^2 = 16c_5d$	$\frac{1\cdot 16cd}{1024}$	$\frac{1023c}{3072d}$	$\frac{4095c}{7680d}$	$\frac{9215c}{14336d}$	$\frac{16383c}{23040d}$	戊矢

表1

この表１の分母子の規則性を検討して次の表２を得ている。分子は二数の奇数の積の形になることを示し、また分母は順次四分の一をとる数を示している（順次 4, 16, 64. 256 倍する）。

	一商	二商	三商	四商	五商	分母子の注	
原汎背冪 $s_0{}^2$	$\frac{4cd}{1}$	$\frac{1\cdot 3c}{3\cdot 4d}$	$\frac{3\cdot 5c}{5\cdot 6d}$	$\frac{5\cdot 7c}{7\cdot 8d}$	$\frac{7\cdot 9c}{9\cdot 10d}$	1・3,3・5等を分子という。以下同じ	甲矢
甲汎背冪 $s_1{}^2$	$\frac{4cd}{1}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{3\cdot 5c}{3\cdot 4d}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{7\cdot 9c}{5\cdot 6d}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{11\cdot 13c}{7\cdot 8d}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{15\cdot 17c}{9\cdot 10d}$	1/4の4を分母という	乙矢
乙汎背冪 $s_2{}^2$	$\frac{4cd}{1}$	$\frac{1}{16}\cdot\frac{7\cdot 9c}{3\cdot 4d}$	$\frac{1}{16}\cdot\frac{15\cdot 17c}{5\cdot 6d}$	$\frac{1}{16}\cdot\frac{23\cdot 25c}{7\cdot 8d}$	$\frac{1}{16}\cdot\frac{31\cdot 33c}{9\cdot 10d}$	1/16の16を分母という	丙矢
丙汎背冪 $s_3{}^2$	$\frac{4cd}{1}$	$\frac{1}{64}\cdot\frac{15\cdot 17c}{3\cdot 4d}$	$\frac{1}{64}\cdot\frac{31\cdot 33c}{5\cdot 6d}$	$\frac{1}{64}\cdot\frac{47\cdot 49c}{7\cdot 8d}$	$\frac{1}{64}\cdot\frac{63\cdot 65c}{9\cdot 10d}$	1/64の64を分母という	丁矢
丁汎背冪 $s_4{}^2$	$\frac{4cd}{1}$	$\frac{1}{256}\cdot\frac{31\cdot 33c}{3\cdot 4d}$	$\frac{1}{256}\cdot\frac{63\cdot 65c}{5\cdot 6d}$	$\frac{1}{256}\cdot\frac{95\cdot 97c}{7\cdot 8d}$	$\frac{1}{256}\cdot\frac{127\cdot 129c}{9\cdot 10d}$	1/256の256を分母という	戊矢
	→ この欄原文になし	$\frac{1\cdot 31\cdot 33}{256} = 3.99609375 \approx 4$	$\frac{1\cdot 63\cdot 65}{256} = 15.99609375 \approx 16$	$\frac{1\cdot 95\cdot 97}{256} = 35.99609375 \approx 36$	$\frac{1\cdot 127\cdot 129}{256} = 63.99609375 \approx 64$		

表2

８．極限を求める

ここで、いよいよ汎背冪の極限を求める。次のようにいう。

探索分母子ノ極限
見ルニ㆓原甲乙丙丁ノ汎背冪ノ分子ヲ㆒各二個ヲ互ニ奇数相乗スルノ例自備ル
然者同数ヲ左右ニヲキ左右各一個ヲ交換シテ相乗之ヲ數ナリ、但向キニ左
右トスル、同數ノ自乗數ヨリ其一個ヲ交換スル、
相乗數者一個不足者也、則矢ノ商萬々タル者モ一個ヲ差ナリ仍而以㆓一個㆒爲㆓各分子ノ極差㆒
而置㆓各分子ヲ㆒加□入極差一個ヲ㆒得數爲㆓各分子極限ト㆒、各分母ヨル各分子極限ナリ
以㆓各分母ヲ㆒除㆓各分子極限ヲ㆒而各爲㆓分子極限ト㆒、定極限也 スル事ヲ探會ス但シ
分母無者直定分子トス

【意訳】分母子の極限を調べる。原甲乙丙丁の汎背冪の分子を見ると、二つの奇数を乗じている。これは同数を左右に置き左右各一個を交換している数である。この数は同数の自乗より１少ない（だけである）。これは、$(n-1)(n+1)=n^2-1$ を意味する。
そして各分子を置き、入極差１を加えたものを各分子の極限とする。
これは、$(n-1)(n+1)+1=n^2-1+1=n^2$ を意味する（n^2-1はnが大きくなればn^2に近くなるという意味する）。各二商の分子でいえば、$(2^2-1)+1=4$, $(4^2-1)+1=16$, $(8^2-1)+1=64$, $(16^2-1)+1=256$, $(32^2-1)+1=1024$ となる。
最後に、各分母を以て各分子極限を除し而して各分子極限と爲す、という。ここでいう分母は表２の分母子の注にいう、1, 4, 16, 64, 256 を指す。なお、分母が１の一商は定分子とする。

この結果は表３のように原甲乙丙丁の汎背冪の各商は同じ値となる。

戊矢	$\frac{64c}{9\cdot 10d}$	$\frac{36c}{7\cdot 8d}$	$\frac{16c}{5\cdot 6d}$	$\frac{4c}{3\cdot 4d}$	$4cd$	丁汎背冪 $s_4{}^2$
丁矢	$\frac{64c}{9\cdot 10d}$	$\frac{36c}{7\cdot 8d}$	$\frac{16c}{5\cdot 6d}$	$\frac{4c}{3\cdot 4d}$	$4cd$	丙汎背冪 $s_3{}^2$
丙矢	$\frac{64c}{9\cdot 10d}$	$\frac{36c}{7\cdot 8d}$	$\frac{16c}{5\cdot 6d}$	$\frac{4c}{3\cdot 4d}$	$4cd$	乙汎背冪 $s_2{}^2$
乙矢	$\frac{64c}{9\cdot 10d}$	$\frac{36c}{7\cdot 8d}$	$\frac{16c}{5\cdot 6d}$	$\frac{4c}{3\cdot 4d}$	$4cd$	甲汎背冪 $s_1{}^2$
甲矢	$\frac{64c}{9\cdot 10d}$	$\frac{36c}{7\cdot 8d}$	$\frac{16c}{5\cdot 6d}$	$\frac{4c}{3\cdot 4d}$	$4cd$	原汎背冪 $s_0{}^2$
	五商	四商	三商	二商	一商	

表3

（表３は何故か汎背冪の順序が逆になっている）

そして最後にこれを「定背冪を求むる率と爲す」といっている。また原汎背冪を用いて本術を次のようにまとめている。

$$\frac{\text{乗率}}{\text{除率}}\quad \frac{2^2}{3\cdot 4}\quad \frac{4^2}{5\cdot 6}\quad \frac{6^2}{7\cdot 8}\quad \frac{8^2}{9\cdot 10}\quad \frac{10^2}{11\cdot 12}\quad \frac{12^2}{13\cdot 14}\quad \frac{14^2}{15\cdot 16}\quad \frac{\text{末準之}}{\text{末倣之}} \qquad ⑪$$

原文にはないが、これは次式の係数を意味する。

$$4\left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 = \underset{\text{一差}}{4cd} + \underset{\text{二差}}{\text{一差}\frac{2^2}{3\cdot 4}\frac{c}{d}} + \underset{\text{三差}}{\text{二差}\frac{4^2}{5\cdot 6}\frac{c}{d}} + \underset{\text{四差}}{\text{三差}\frac{6^2}{7\cdot 8}\frac{c}{d}} + \underset{\text{五差}}{\text{四差}\frac{8^2}{9\cdot 10}\frac{c}{d}} + \cdots \qquad ⑫$$

兼庭の『円理弧背術』はこのあと、「応用編」として本誌第 32 号の 1/4～3/4 頁で述べた 5 個の式を導いている。その導き方については別途検討したい。

（兼庭の『円理弧背術』終り）

～～

零約術について

75 号で零約術が出てきたので、簡単にまとめておきたい。

零約術とは、桁数の多い少数、無理数などの不尽数を近似した分数で表す方法で、連分数のことである。「零約」とは分数のことをいう。連分数は次のように定義される。

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_n+\cdots}}}$$

$b_i=1$ の場合は正則連分数というが、単に連分数と言えばこの場合を指す。

◆連分数の例

$$\frac{11}{8}=1.375=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}\qquad \sqrt{2}=1.414213\cdots=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$

前者は有限連分数で、$11/8=[1;2,1,2]$ 、後者は無限連分数で、$\sqrt{2}=\left[1;\dot{2}\right]$ と表される。

◆円周率$\pi=[3;7,15,1,292,1,1,\cdots]$ を例に求め方を記す。

$\pi=3.14159\cdots$ だから、 $\pi=3+(\pi-3)=3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\pi-3}}$

$\dfrac{1}{\pi-3}=7.06\cdots$ だから、$\pi=3+\cfrac{1}{7+\left(\cfrac{1}{\pi-3}-7\right)}=3+\cfrac{1}{7+\left(\cfrac{22-7\pi}{\pi-3}\right)}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{\pi-3}{22-7\pi}}}$

そして、$\dfrac{\pi-3}{22-7\pi}=15.96\cdots$ だから、$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\left(\cfrac{\pi-3}{22-7\pi}-15\right)}}$

この作業を適当な回数まで展開することにより、π の近似値を分数で表すことができる。因みに、

$$\pi\cong 3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}\ ,\qquad 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{106}{15}}=3+\frac{15}{106}=\frac{333}{106}$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{113}{16}}=\frac{355}{113}$$

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{292}{293}}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{4687}{293}}}=3+\cfrac{355}{7+\cfrac{293}{4687}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{33102}{4687}}=\frac{103993}{33102}$$

従って、πの近似(部分)分数として、$\dfrac{22}{7}$、$\dfrac{333}{106}$、$\dfrac{355}{113}$、$\dfrac{103993}{33102}$、$\cdots$ を得る。

◆関孝和のπの近似分数の求め方

πの値は小数点以下十分に知っているとする。$\dfrac{3}{1} < \pi < \dfrac{4}{1}$ から始めて分母子を加える。

$$\frac{3+4}{1+1} = \frac{7}{2} = 3.5 > \pi\,, \frac{7+3}{2+1} = \frac{10}{3} = 3.333\cdots > \pi$$

得られた数がπより大きい内は分母に1、分子に3を加えて、πより小さい分数が得られたら分母に1、分子に4を加える。続けると、

$$\frac{10+3}{3+1} = \frac{13}{4}\,, \frac{13+3}{4+1} = \frac{16}{5}\,, \frac{16+3}{5+1} = \frac{19}{6}\,, \frac{19+3}{6+1} = \frac{22}{7}$$ は何れもπより大。

次の $\dfrac{22+3}{7+1} = \dfrac{25}{8}$ でπより小。よって分母に1、分子に4を加えと $\dfrac{25+4}{8+1} = \dfrac{29}{9} > \pi$

以下同様にして、$\dfrac{29+3}{9+1} = \dfrac{32}{10} > \pi\,, \cdots$ これを続けて $\dfrac{355}{113}$ に達する。

（『活要算法 巻亨』の「諸約之法」の中に「零約」があり、$\sqrt{2}$ で上記のことが記されている）

◆関孝和のこの方法は、会田安明らによって改良されたという。関の方法は多率（πより大きい数値）が得られたら、最初の少率3／1まで遡っていて進行が遅く、113番目に355／113を得るが、会田の改良では24番目になるという。しかし、連分数の方法では前述のように4番目に得られる。そして、田中由真(よしざね、1651～1719)は連分数と同じ結果を得る零約術の手法を得たという。(『活要算法 巻貞』の円周率に零約術があり、113個の分数が記されている)

◆綴術との関係

一つの解となる数値を求める際、小数値を求めないで分数の形で求めるという方法も、広義の零約術という。これは「綴術」ともいわれる。「円理弧背術」に出て来る様々な式はこれに当たる。

◆近似分数の計算方法は建部賢弘の兄、賢明の得たもので和算史上誇るべきもので、円周率は次のように表された。

$$\frac{22}{7}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \frac{312689}{99532}, \frac{833719}{265381},$$

これは、$\pi = [3; 7.15,1,292,1,1,1,2,\cdots]$ と表わされる。

◆久留島義太は、ある数の平方根を小数に開かないで、直接に近似分数を得る方法を得た。これは平方零約術といわれる。

編集後記

今井兼庭の「円理弧背術」を、建部賢弘の同名書をもとに大まかですが理解してきました。勿論一字一句を厳密に解読できた訳ではありませんし、解読できなかった「漢文章」もあります。それでも私にとっては一つの成果です。ゆっくりですが、今後は今に残る様々な「円理弧背術」も見たいと思います。

コロナ禍の中、心配していた娘が無事男の子を出産し里帰り中。我が家では傷んだ屋根の葺き替えや、ワクチン接種も重なり何かと落ち着かない。コロナだけでもはやく終息して欲しい。五輪どころではない筈だが。

新生児迎へて家に
皐月咲く

【参考文献】
『和算の事典』(3.9章 零約術、朝倉書店)、平山『和算の歴史』(ちくま学芸文庫)、平山『関孝和全集』(大阪教育図書)、他