やまぶき４
田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

第77号　令和三年（二〇二一）六月二日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三―二一―二
山口正義（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Ｅメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき 和算と歴史随想」

# 今井兼庭の「円理弧背術」を学ぶ（１）

第 73 号～76 号では４回に渡り、“建部不休の「円理弧背術」を学ぶ”として原文を交えて述べました。今回の 77 号では“今井兼庭の「円理弧背術」を学ぶ”として述べます。ただ、兼庭のものは建部のものを前提としていて同じような内容の展開がありますので、この点を踏まえて主に違いを述べることにします。

ところで、東北大学附属図書館所蔵の今井兼庭の『円理弧背術』には２種類あります。林集書 1536 と林文庫 0913 です。何れも内題に「円理弧背術　名曰綴術　今井兼庭撰」とありますが、後者には「利明之印」とその一丁前には「三十六方位盤」の印があることから本多利明の写しともいわれます。前者は誰の写しか不明です。

以下前者を主体に解読し後者も参考にします。【　】内は直訳または意訳です。

## １．前文（解法の方針）

まず解法の方針を次のようにいう。これは明らかに建部不休の「円理弧背術」を受けてのことである。

弧背術者弧形之内容㆓数萬斜ヲ㆒依㆓勾股互換術㆒ 互換術者古所謂乗除法也
各求㆑矢ヲ以㆔円径ト與㆓一十六㆒相乗而 弧背ハ次第取㆓二分之一㆒故半斜數冪不㆑及㆑乗ナリ
各汎背冪トシ諸差ノ極限ヲ探會シ定背冪ヲ得テ諸差ノ例ヲ探索シテ設㆓本術㆒

【弧背術は弧形の内に数万斜を容れ、勾股互換術に依り（互換術は古所謂う乗除法なり） 各矢を求め十六と円径とを乗じて（弧背は順次二分の一を取る故、半斜数冪は乗ずる必要はない） 各汎背冪とし諸差の極限を吟味し定背冪を得て諸差の例を探索して本術を設ける】

これは建部の「円理弧背術」の「汎半背冪を求める」（第 75 号）に出てくる次の記述

原矢・径＝二斜面冪 、　二斜面冪・半斜数冪 1＝原汎半背冪$= cd$ 、
甲矢・径＝四斜面冪 、　四斜面冪・半斜数冪 4＝甲汎半背冪$= 4c_1d$ 、
乙矢・径＝八斜面冪 、　八斜面冪・半斜数冪 16＝乙汎半背冪$= 16c_2d$

に対して、汎半背冪ではなく、弧の取り方を順次前の弧の半分として、$s_i^2 = 16c_{i+1}d$ の形で統一的に汎背冪として求めていることを指している。兼庭の解法の重要部分である（７項参照)。

## ２．演段（開方式）

斜と矢と径の関係式を求めているが、内容は建部のものとほぼ同じで、次のように始まる。

先如㆑圖弧形之内ニ容㆓二斜ヲ㆒容㆓四斜ヲ㆒次容㆓八斜ヲ㆒次第如此斜數倍而求㆓各矢㆒

【先ず図の如く弧形之内に二斜を容れ、四斜を容れ、次に八斜を容れ、次第此如く斜数倍而各矢を求む】

ここでは、$斜^2 = 矢 \times 径 = cd$　　①　を求めている。

勾股互換之図

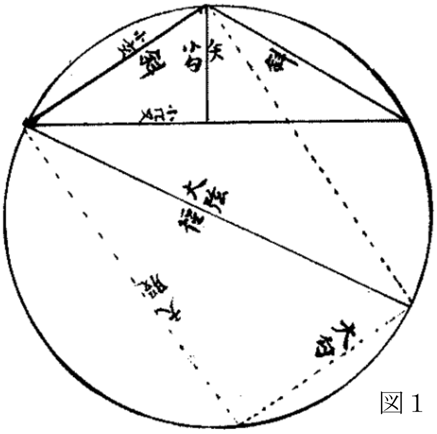


図１

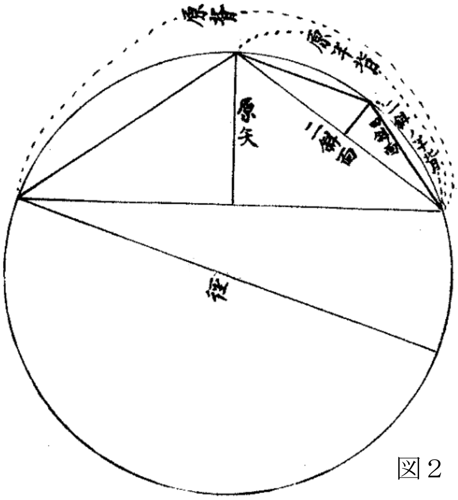



図２

### ３．甲矢を求める

ここでは開方式として四約するといって、建部のものと形を変えている。

$$-\frac{cd}{4}+dc_1-c_1^2=0 \qquad ②$$

その後不休のものと同じように「皈除求商術」で甲矢を求めているが、ここでは組立除法での計算を次に示す。その結果、甲矢$c_1$を得る。

（原式）　$-c_1^2+dc_1-\frac{cd}{4}=0$

| No | 商 | 廉(2次項) | 法(1次項) | 実(定数項) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{c}{4}$ | $-1$（廉） | $d$（法） | $-\frac{cd}{4}$（実） |
| | （一商）（初商） | | $-\frac{c}{4}$（二法） | $\frac{cd}{4}-\frac{c^2}{16}$ |
| | | $-1$ | $d-\frac{c}{4}$ | $-\frac{c^2}{16}$（二商実） |
| | | | $-\frac{c}{4}$ | |
| 2 | $\frac{c^2}{16d}$ | $-1$ | $d-\frac{c}{2}$　（注）$-\frac{c}{2}$も二法 | $-\frac{c^2}{16}$ |
| | （二商） | | $-\frac{c^2}{16d}$（三法） | $\frac{c^2}{16}-\frac{c^3}{32d}-\frac{c^4}{256d^2}$ （三商実）（四商実） |
| | | $-1$ | $d-\frac{c}{2}-\frac{c^2}{16d}$ | $-\frac{c^3}{32d}-\frac{c^4}{256d^2}$ |
| | | | $-\frac{c^2}{16d}$ | |
| 3 | $\frac{c^3}{32d^2}$ | $-1$ | $d-\frac{c}{2}-\frac{c^2}{8d}$ | $-\frac{c^3}{32d}-\frac{c^4}{256d^2}$ |
| | （三商） | | $-\frac{c^3}{32d^2}$（四法） | $\frac{c^3}{32d}-\frac{c^4}{64d^2}-\frac{c^5}{256d^3}-\frac{c^6}{1024d^4}$ （四商実）（五商実）（六商実） |
| | | $-1$ | $d-\frac{c}{2}-\frac{c^2}{8d}-\frac{c^3}{32d^2}$ | $-\frac{5c^4}{256d^2}-\frac{c^5}{256d^3}-\frac{c^6}{1024d^4}$ |
| | | | $-\frac{c^3}{32d^2}$ | |
| 4 | $\frac{5c^4}{256d^3}$ | $-1$ | $d-\frac{c}{2}-\frac{c^2}{8d}-\frac{c^3}{16d^2}$ | $-\frac{5c^4}{256d^2}-\frac{c^5}{256d^3}-\frac{c^6}{1024d^4}$ |
| | （四商） | | | |

$$c_1 = \frac{1 \cdot c}{4} + \frac{1 \cdot c^2}{16d} + \frac{1 \cdot c^3}{32d^2} + \frac{5c^4}{256d^3} + \frac{7c^5}{512d^4} \qquad \text{甲矢} \qquad ③$$

## ４．係数の法側の探索

矢の式を表す場合、建部のものでは次のように表すことがある。

$$\text{矢}＝\text{元数}＋\text{一差}＋\text{二差}＋\text{三差}＋\cdots = \text{元数}＋\text{元数}\frac{\text{一差}}{\text{元数}}＋\text{一差}\frac{\text{二差}}{\text{一差}}＋\text{二差}\frac{\text{三差}}{\text{二差}}＋\cdots \qquad ④$$

これを兼庭は次のように表現している（１項から一差としている)。

$$\text{矢}＝\text{一差}＋\text{二差}＋\text{三差}＋\text{四差}＋\cdots = \text{一差}＋\text{一差}\frac{\text{二差}}{\text{一差}}＋\text{二差}\frac{\text{三差}}{\text{二差}}＋\text{三差}\frac{\text{四差}}{\text{三差}}＋\cdots \qquad ⑤$$

係数の法則の検討は③の相隣り合う項のの比を⑤のようにとり、その数字を出している。結果としては次のようになるが、原本には何故かここまでの記述はない。

$$c_1 = \underset{\text{一差}}{\frac{c}{4}} + \underset{\text{二差}}{\text{一差}\frac{c}{4d}} + \underset{\text{三差}}{\text{二差}\frac{3c}{6d}} + \underset{\text{四差}}{\text{三差}\frac{5c}{8d}} + \underset{\text{五差}}{\text{四差}\frac{7c}{10d}} + \cdots \qquad ⑥$$

## ５．乙矢を求める

四斜の矢である乙矢は、　$-c_1 d + 4dc_2 - 4c_2^2 = 0$　⑦

に求めた $c_1$ を代入した次式から求めている。

$$-\underset{\text{(実)}}{\left(\frac{cd}{4} + \frac{3c^2}{48} + \frac{45c^3}{1440d} + \frac{1575c^4}{80640d^2} + \frac{99225c^5}{7257600d^3}\right)} + \underset{\text{(方)}}{4dc_2} - \underset{\text{(廉)}}{4c_2^2} = 0 \qquad ⑧$$

$$c_2 = \frac{c}{16} + \frac{15c^2}{768d} + \frac{945c^3}{92160d^2} + \frac{135135c^4}{20643840d^3} + \frac{34459425c^5}{7431782400d^4} + \cdots \qquad ⑨$$

## ６．丙丁戊の矢を簡易に求める

建部のものと異なり、甲矢から乙矢を、乙矢から丙矢を、丙矢から丁矢をと順次求める方法を述べている。一例として甲矢から乙矢を得る方法を次に示す。幾つかの間違いがあり()で修正を示した。

乙矢一商者甲矢一商除シテ円徑ヲ得ル數ナリ(「甲矢一商四分之一トス」するのが正しい)

乙矢二商者甲矢二商四分之一ト乙矢一商冪トノ和ナリ

乙矢三商者甲矢三商四分之一ト乙矢二商因乙(甲)矢一商半ト相併以㆓円徑㆒除㆑之數ナリ

乙矢四商者甲矢四商四分之一ト乙矢二商冪乙矢三商因乙(甲)矢一商半ト三和以㆓円徑㆒除㆑之得ル數ナリ

乙矢五商者　甲矢五商四分之一ト乙矢三商因乙矢一(二)商半(倍)ト乙矢四商因乙(甲)矢一商半ト三和而以円徑除之得ル數ナリ

右五商相併爲㆓乙矢㆒

この規則性をもとに簡易に次の矢を求めている。帰納法的な求め方であり、原文は戊矢まで求めている。建部のものより簡単に求まる方法である。

## ７．汎背冪を求める

建部のものは汎半背冪（定半背冪）を求めているが、兼庭は汎背冪を求める。それは次のように求めている。

以㆓原矢㆒求㆓甲矢㆒以㆔円徑與㆓一十六㆒相乗之得㆓原汎背冪㆒

以㆓甲矢㆒求㆓乙矢㆒以㆔円徑與㆓一十六㆒相乗之得㆓甲汎背冪㆒　原弧取二分之一甲弧トス
以㆓乙矢㆒求㆓丙矢㆒以㆔円徑與㆓一十六㆒相乗之得㆓乙汎背冪㆒　甲弧取二分之一乙弧トス
以㆓丙矢㆒求㆓丁矢㆒以㆔円徑與㆓一十六㆒相乗之得㆓乙汎背冪㆒　乙弧取二分之一丙弧トス
以㆓丁矢㆒求㆓戊矢㆒以㆔円徑與㆓一十六㆒相乗之得㆓丁汎背冪㆒　丙弧取二分之一丁弧トス
原甲乙丙丁之汎背者次第取㆓二分之一ヲ㆒其次々汎背トス故ニ
求其冪數者以㆓一十六㆒爲㆑率委細依㆑圖可シ㆑知㆑之

【原矢を以て甲矢を求め、十六と円徑とを以て相乗じて原汎背冪を得る】
これは、原汎背冪＝甲矢×16×径、を意味する。

$(s_0/4)^2 = c_1 d \quad \therefore \quad s_0^2 = 16c_1 d$

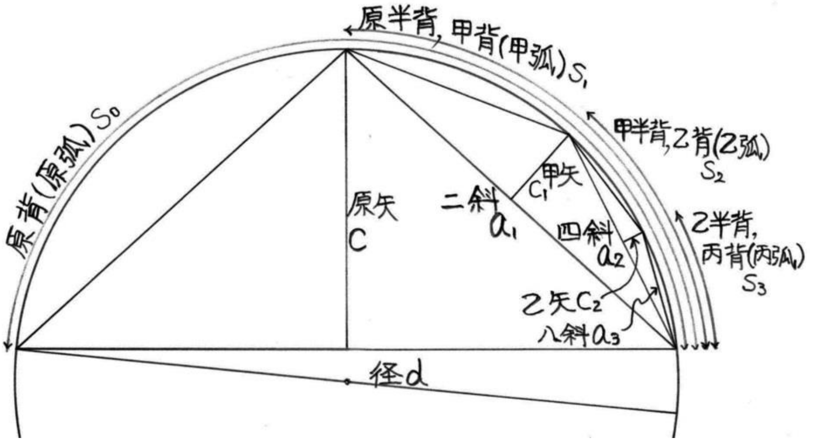
同様にして、$s_1^2 = 16c_2 d$　（原弧(原背)の二分の一を甲弧とする）

$s_2^2 = 16c_3 d$　（甲弧の二分の一を乙弧とする）

$s_3^2 = 16c_4 d$　（乙弧の二分の一を丙弧とする）

$s_4^2 = 16c_5 d$　（丙弧の二分の一を丁弧とする）　⑩

甲背(甲弧)・乙背(乙弧)・丙背(丙弧)のとりかたを下記に示す（原本にはなし）。




上図で以下が成り立つ。

$a_2^2 = c_1 d$，原汎背 $= 4a_2 \fallingdotseq s_0$　$\therefore$ 原汎背冪 $= (4a_2)^2 = 16a_2^2 = 16c_1 d \fallingdotseq s_0^2$

$a_3^2 = c_2 d$，甲汎背 $= 4a_3 \fallingdotseq s_1$　$\therefore$ 甲汎背冪 $= (4a_3)^2 = 16a_3^2 = 16c_2 d \fallingdotseq s_1^2$

$a_4^2 = c_3 d$，乙汎背 $= 4a_4 \fallingdotseq s_2$　$\therefore$ 乙汎背冪 $= (4a_4)^2 = 16a_4^2 = 16c_3 d \fallingdotseq s_2^2$

$a_5^2 = c_4 d$，丙汎背 $= 4a_5 \fallingdotseq s_3$　$\therefore$ 丙汎背冪 $= (4a_5)^2 = 16a_5^2 = 16c_4 d \fallingdotseq s_3^2$

兼庭はこの方法で各汎背冪を求めたものを表にしている。表は次号で示す。（以下次号）

## 編集後記

今井兼庭の「円理弧背術」を学ぶ、として二回に渡り述べる予定です。兼庭のものを初めて読むと最初から躓きました。いくら読んでも皆目見当がつきませんでした。その筈で、建部不休の解き方を指し、それとは違う解法を端的に述べているということが文献でわかり、為に建部に移りその後兼庭に戻りました。躓きは汎背冪に関することですが、他にも各矢の求め方や汎背冪の極限の求め方でも斬新さがあるように思えました。

天文暦学者の千葉歳胤は『天文大成真遍三條図解』の自序で「同門に今井官子（兼庭）という算術に良く達している者がいて、先生（幸田親盈）は彼に命じて弧矢一術の半なれるを研究させ、苦節三年を要して完成させた」とありますが、これはまさしく兼庭の「円理弧背術」の研究を指しているのではないかと思います。

先人の業績みるや額の花