やまぶき
4
田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

第76号　令和三年（二〇二一）四月二一日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三〜二一〜二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき　和算と歴史随想」

建部不休の「円理弧背術」を学ぶ（４）

前回（75 号）までで、次の定半背冪を求めた。

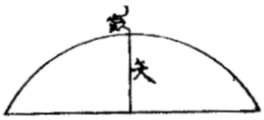
$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = cd + cd\frac{2^2}{3\cdot4}\frac{c}{d} + \frac{c^2}{3}\frac{4^2}{5\cdot6}\frac{c}{d} + \frac{8c^3}{45d}\frac{6^2}{7\cdot8}\frac{c}{d} + \frac{4c^4}{35d^2}\frac{8^2}{9\cdot10}\frac{c}{d} + \cdots$$

$$= cd + 元数\frac{2^2}{3\cdot4}\frac{c}{d} + 一差\frac{4^2}{5\cdot6}\frac{c}{d} + 二差\frac{6^2}{7\cdot8}\frac{c}{d} + 三差\frac{8^2}{9\cdot10}\frac{c}{d} + \cdots \quad ㉕$$

この後は、甲矢・乙矢・丙矢･･･から各汎半背冪の式を出し、その係数の形を検討し、小数点以下が 9 が並ぶことから極限を推定している。前回の方法より簡易に結果を得る方法を示している。

９．別術（仮題）

最後の章とも言えるここでは、より簡単に最終の式を導き出す方法を述べている。先ず問答形式風に次のようにある。



假令有レ弧形矢二寸徑一尺問弧若干

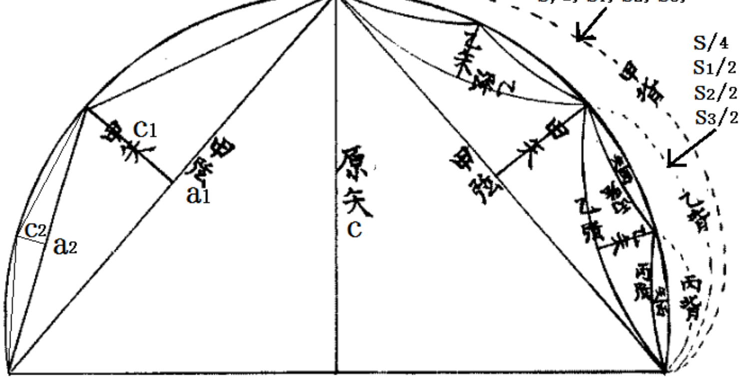
答云弧

術曰置二徑矢相乗一四因而得数為二原数一置二原数一、乗レ矢
四(二ヶ巾)二因之一以レ徑除レ之三除四除メ而為二一差一置二一差一乗レ矢
又乗二一十六(四ヶ巾)一以レ徑除レ之五除六除メ而為二二差一、置二二差一
乗レ矢
又乗二三十六(六ヶ巾)一以レ徑除レ之七除八除メ而為二三差一、置二三差一
乗レ矢
又乗二六十四(八ヶ巾)一以レ徑除レ之九除一十除メ而為二四差一、置二四差
一乗レ矢
又乗二一百(一〇ヶ巾)一以レ徑除レ之一十一除一十二除メ而為二五差一、
置二五差一乗レ矢
又乗二一百四十四一以レ徑除レ之一十三除一十四除メ而為二六差一、

これは次のように㉕式を 4 倍したものになる。ここでは $4cd$ を原数と呼んでいる。

$$4\left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 = 4cd + 原数\frac{2^2}{3\cdot4}\frac{c}{d} + 一差\frac{4^2}{5\cdot6}\frac{c}{d} + 二差\frac{6^2}{7\cdot8}\frac{c}{d} + 三差\frac{8^2}{9\cdot10}\frac{c}{d} + \cdots \quad ㉚$$

続いて右の図がある。ここでは、甲背、乙背、丙背に注意。



続いて、甲矢から戊矢までを次のように再掲している。

$$c_1=\frac{c}{4}+\frac{c^2}{16d}+\frac{c^3}{32d^2}+\frac{5c^4}{256d^3}+\frac{7c^5}{512d^4}\qquad \text{甲矢}\qquad ㉛$$

$$c_2=\frac{c}{16}+\frac{5c^2}{256d}+\frac{21c^3}{2048d^2}+\frac{429c^4}{65536d^3}+\frac{2431c^5}{524288d^4}\qquad \text{乙矢}\qquad ㉜$$

$$c_3=\frac{c}{64}+\frac{21c^2}{4096d}+\frac{357c^3}{131072d^2}+\frac{29325c^4}{16777216d^3}+\frac{666655c^5}{536870912d^4}\qquad \text{丙矢}\qquad ㉝$$

$$c_4=\frac{c}{256}+\frac{85c^2}{65536d}+\frac{5797c^3}{8388608d^2}+\frac{1907213c^4}{4294967296d^3}+\frac{173556383c^5}{549755813888d^4}\qquad \text{丁矢}\qquad ㉞$$

$$c_5=\frac{c}{1024}+\frac{341c^2}{1048576d}+\frac{93093c^3}{536870912d^2}+\frac{122550285c^4}{1099511627776d^3}+\frac{44616473759c^5}{562949953421312d^4}\qquad \text{戊矢}\qquad ㉟$$

そして、「列二甲矢一以二圓徑一乗レ之得数為二乙弦冪一則甲汎半背冪也」としている。これは、

$$\text{甲汎半背冪}=\left(\frac{s_1}{2}\right)^2=a_2^2=c_1d=\frac{cd}{4}+\frac{c^2}{16}+\frac{c^3}{32d}+\frac{5c^4}{256d^2}+\frac{7c^5}{512d^3}\qquad ㊱$$

となる。ここで、「従レ上逐テ除レ下 乃チ逐テ乗二分母一以二分子一除クナリ」とあり相隣り２項の比を考えるとある。㊱は次のように表せる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{s_1}{2}\right)^2&=\frac{cd}{4}+\frac{c^2}{16}+\frac{c^3}{32d}+\frac{5c^4}{256d^2}+\frac{7c^5}{512d^3}\\&=\text{原数}+\text{一差}+\text{二差}+\text{三差}+\text{四差}\\&=\frac{cd}{4}+\text{原数}\frac{\text{一差}}{\text{原数}}+\text{一差}\frac{\text{二差}}{\text{一差}}+\text{二差}\frac{\text{三差}}{\text{二差}}+\text{三差}\frac{\text{四差}}{\text{三差}}\end{aligned}\qquad ㊲$$

従って、相隣り２項の比は次のようになる。(原数はそのままとする)

$$\frac{cd}{4},\quad \frac{\text{一差}}{\text{原数}}=\frac{c}{4d},\quad \frac{\text{二差}}{\text{一差}}=\frac{c}{2d},\quad \frac{\text{三差}}{\text{二差}}=\frac{5c}{8d},\quad \frac{\text{四差}}{\text{三差}}=\frac{7c}{10d}\qquad ㊳$$

ここで係数のみに注目すると、次のように表せ法則性がわかる。

$$\frac{1}{4},\quad \frac{1}{4}=\frac{1\cdot 3}{3\cdot 4},\quad \frac{1}{2}=\frac{3\cdot 5}{5\cdot 6},\quad \frac{5}{8}=\frac{5\cdot 7}{7\cdot 8},\quad \frac{7}{10}=\frac{7\cdot 9}{9\cdot 10}\qquad ㊴$$

これを「甲汎半背冪逐除商」といっている。以下同様。

次に乙汎半背冪を求める。$a_3^2=c_2d$，$s_2=4a_3$ だから、$a_3^2=\left(\frac{s_2}{4}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{s_2}{2}\right)^2=c_2d$，従って

$$\text{乙汎半背冪}=\left(\frac{s_2}{2}\right)^2=4c_2d=4\left(\frac{cd}{16}+\frac{5c^2}{256}+\frac{21c^3}{2048d}+\frac{429c^4}{65536d^2}+\frac{2431c^5}{524288d^3}\right)\qquad ㊵$$

(原文は「４倍」が抜けている)

この場合の㊳に相当するものは次のようになる。

$$\frac{cd}{4},\quad \frac{\text{一差}}{\text{原数}}=\frac{5c}{16d},\quad \frac{\text{二差}}{\text{一差}}=\frac{21c}{5\cdot 8d},\quad \frac{\text{三差}}{\text{二差}}=\frac{429c}{21\cdot 32d},\quad \frac{\text{四差}}{\text{三差}}=\frac{2431c}{8\cdot 429d}\qquad ㊶$$

㊴に相当するものは、次のようになり法則性がある。

$$\frac{1}{4},\quad \frac{5}{16}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 4},\quad \frac{21}{5\cdot 8}=\frac{7\cdot 9}{4\cdot 5\cdot 6},\quad \frac{429}{21\cdot 32}=\frac{11\cdot 13}{4\cdot 7\cdot 8},\quad \frac{2431}{8\cdot 429}=\frac{15\cdot 17}{4\cdot 9\cdot 10}\qquad ㊷$$

同様にして、丙・丁・戊の汎半背冪と係数の法則性（結論のみ）を求めている。

$a_4^2 = c_3 d$, $s_3 = 4a_4$ だから、$a_4^2 = \left(\frac{s_3}{8}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{s_3}{2}\right)^2 = c_3 d$，従って

$$\text{丙汎半背冪} = \left(\frac{s_3}{2}\right)^2 = 16c_3 d$$

$$= 16\left(\frac{cd}{64} + \frac{21c^2}{4096} + \frac{357c^3}{131072d} + \frac{29325c^4}{16777216d^2} + \frac{666655c^5}{536870912d^3}\right) \qquad ㊸$$

（原文は「16 倍」が抜けている）

係数：　$\frac{1}{4}$，　$\frac{7\cdot 9}{3\cdot 4\cdot 16}$，　$\frac{15\cdot 17}{5\cdot 6\cdot 16}$，　$\frac{23\cdot 25}{7\cdot 8\cdot 16}$，　$\frac{31\cdot 33}{9\cdot 10\cdot 16}$　　㊹

$$\text{丁汎半背冪} = \left(\frac{s_4}{2}\right)^2 = 64c_4 d$$

$$= 64\left(\frac{cd}{256} + \frac{85c^2}{65536} + \frac{5797c^3}{8388608d} + \frac{1907213c^4}{4294967296d^2} + \frac{173556383c^5}{549755813888d^3}\right) \qquad ㊺$$

（原文は「64 倍」が抜けている）

係数：　$\frac{1}{4}$，　$\frac{15\cdot 17}{3\cdot 4\cdot 64}$，　$\frac{31\cdot 33}{5\cdot 6\cdot 64}$，　$\frac{47\cdot 49}{7\cdot 8\cdot 64}$，　$\frac{63\cdot 65}{9\cdot 10\cdot 64}$　　㊻

$$\text{戊汎半背冪} = \left(\frac{s_5}{2}\right)^2 = 256c_5 d$$

$$= 256\left(\frac{cd}{1024} + \frac{341c^2}{1048576} + \frac{93093c^3}{536870912d} + \frac{122550285c^4}{1099511627776d^2} + \frac{44616473759c^5}{562949953421312d^3}\right) \qquad ㊼$$

（原文は「256 倍」が抜けている）

係数：　$\frac{1}{4}$，　$\frac{31\cdot 33}{3\cdot 4\cdot 256}$，　$\frac{63\cdot 65}{5\cdot 6\cdot 256}$，　$\frac{95\cdot 97}{7\cdot 8\cdot 256}$，　$\frac{127\cdot 129}{9\cdot 10\cdot 256}$　　㊽

ここで、係数のみを配列すると次のようになる（表１）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝　表１　＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

	原数	一差	二差	三差	四差
甲：	$\frac{1}{4}$，	$\frac{1\cdot 3}{3\cdot 4}$，	$\frac{3\cdot 5}{5\cdot 6}$，	$\frac{5\cdot 7}{7\cdot 8}$，	$\frac{7\cdot 9}{9\cdot 10}$
乙：	$\frac{1}{4}$，	$\frac{3\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 4}$，	$\frac{7\cdot 9}{4\cdot 5\cdot 6}$，	$\frac{11\cdot 13}{4\cdot 7\cdot 8}$，	$\frac{15\cdot 17}{4\cdot 9\cdot 10}$
丙：	$\frac{1}{4}$，	$\frac{7\cdot 9}{3\cdot 4\cdot 16}$，	$\frac{15\cdot 17}{5\cdot 6\cdot 16}$，	$\frac{23\cdot 25}{7\cdot 8\cdot 16}$，	$\frac{31\cdot 33}{9\cdot 10\cdot 16}$
丁：	$\frac{1}{4}$，	$\frac{15\cdot 17}{3\cdot 4\cdot 64}$，	$\frac{31\cdot 33}{5\cdot 6\cdot 64}$，	$\frac{47\cdot 49}{7\cdot 8\cdot 64}$，	$\frac{63\cdot 65}{9\cdot 10\cdot 64}$
戊：	$\frac{1}{4}$，	$\frac{31\cdot 33}{3\cdot 4\cdot 256}$，	$\frac{63\cdot 65}{5\cdot 6\cdot 256}$，	$\frac{95\cdot 97}{7\cdot 8\cdot 256}$，	$\frac{127\cdot 129}{9\cdot 10\cdot 256}$

（注）　$\frac{31\cdot 33}{256} = 3.996\cdots$，　$\frac{63\cdot 65}{256} = 15.996\cdots$，　$\frac{95\cdot 97}{256} = 35.996\cdots$，　$\frac{127\cdot 129}{256} = 63.996\cdots$

＝＝

原文は、「置所得右各分子ヲ以各分母除之得各分子故去各分母得数列左」として、各 x 差の分母を共通化し、分子を計算して小数化して表にまとめている。表では、甲・乙・丙・丁・戊・己・庚・辛・壬・癸までの十個の汎半背冪逐除商を求め、且つそれぞれ五差まで求めている。

そして上述のように「ｘ倍」が抜けているため原数の値は異なっている。係数のみ示せば次のようになっている（表２）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝　表２　＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

	原数	一差	二差	三差	四差	五差
甲	0.25 ,	$\frac{3}{3\cdot 4}$,	$\frac{15}{5\cdot 6}$,	$\frac{35}{7\cdot 8}$,	$\frac{63}{9\cdot 10}$,	$\frac{99}{11\cdot 12}$
乙	0.0625 ,	$\frac{3.75}{3\cdot 4}$,	$\frac{15.75}{5\cdot 6}$,	$\frac{35.75}{7\cdot 8}$,	$\frac{63.75}{9\cdot 10}$,	$\frac{99.75}{11\cdot 12}$
丙	0.015625 ,	$\frac{3.9375}{3\cdot 4}$,	$\frac{15.9375}{5\cdot 6}$,	$\frac{35.9375}{7\cdot 8}$,	$\frac{63.9375}{9\cdot 10}$,	$\frac{99.9375}{11\cdot 12}$
丁	0.00390625 ,	$\frac{3.984375}{3\cdot 4}$,	$\frac{15.984375}{5\cdot 6}$,	$\frac{35.984375}{7\cdot 8}$,	$\frac{63.984375}{9\cdot 10}$,	$\frac{99.984375}{11\cdot 12}$
戊	0.0009765625,	$\frac{3.99609375}{3\cdot 4}$,	$\frac{15.99609375}{5\cdot 6}$,	$\frac{35.99609375}{7\cdot 8}$,	$\frac{63.99609375}{9\cdot 10}$,	$\frac{99.99609375}{11\cdot 12}$
己	0.00024414062,	$\frac{3.9990234375}{3\cdot 4}$,	$\frac{15.9990234375}{5\cdot 6}$,	$\frac{35.9990234375}{7\cdot 8}$,	$\frac{63.9990234375}{9\cdot 10}$,	$\frac{99.9990234375}{11\cdot 12}$
………						
癸	0.00000095367431640625,	$\frac{3.99999618530273437 5}{3\cdot 4}$,	$\frac{15.999996185302734375}{5\cdot 6}$,	$\frac{35.999996185302734375}{7\cdot 8}$,	$\frac{63.999996185302734375}{9\cdot 10}$,	$\frac{99.999996185302734375}{11\cdot 12}$

＝＝＝

１０．探索各分子極限

　この表から分子の極限を求めている。「視㆓一差ノ分子ヲ㆒毎㆑増㆑除商九ヲ長ス得㆓三個九九九九九余㆒故以㆓四個㆒為㆓一差分子極限㆒」として、甲から癸の一差の分子を眺めると「$4=2^2$」に収束していくことがわかる。同様に二差は「$16=4^2$」に、三差は「$36=6^2$」に、四差は「$64=8^2$」に、五差は「$100=10^2$」に収束して行くとしている。また、原数については「原数者又認㆓極限四分之一㆒」と記している。実際には表１のように各矢の汎半背冪逐除商の1/4 だから収束値も同様である。

　従って、結果は㉕式と同じになるが、このことは原文にはなく、甲から癸までの汎半背冪逐除商を五差までを表で示しているのみである。その表の内容は甲から癸まで同じ内容である。

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \underset{(元数)}{cd} + \underset{(一差)}{元数\frac{2^2}{3\cdot 4}\frac{c}{d}} + \underset{(二差)}{一差\frac{4^2}{5\cdot 6}\frac{c}{d}} + \underset{(三差)}{二差\frac{6^2}{7\cdot 8}\frac{c}{d}} + \underset{(四差)}{三差\frac{8^2}{9\cdot 10}\frac{c}{d}} + \cdots \qquad ㉕再掲$$

（参考文献は、前号（75 号）で掲載しました）

編集後記

　建部不休の「円理弧背術」を学ぶ、として四回に渡り述べてきましたが、はたしてこんな内容で良いのかと悩みます。が、これに懲りずに目標とする今井兼庭のものを解読（勉強）し、さらに、関流の秘書といわれる「円理弧背術」に関連する書物や人物についても次の勉強目標としたいと思いますが…。

　新型コロナは一年経て益々悪い状況。高齢者のワクチン接種の案内が来て申し込んだが、感染は増える一方。大阪は三回目の緊急事態宣言へ。東京も追随模様。色んな意味で困ったことになりそうだ。正直オリパラどころでない筈だが、首相や都知事の言行は理解不能。

　花ミズキ街路と庭を
　　比べをり