やまぶき 4

田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

第75号　令和三年（二〇二一）三月二六日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三―二一―二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき　和算と歴史随想」

建部不休の「円理弧背術」を学ぶ（３）

【余談】

「円理弧背術」の成立について『明治前日本数学史　第二巻』は次のように言う。

(1)円理弧背術と呼ばれる書名は建部賢弘のつけたものではなく、後の誰かがつけたものである。何となれば賢弘の綴術はもっと広い意味をもっているからである。

(2)本多利明の自筆の写本が（東北大の）林文庫に収蔵されているが、これには円理弧背綴術と題簽にあり、(略) この書の巻尾に本多利明が自ら誌した次の文章がある。

> 此書建部不休先生之製作也。其向授時暦之起源詳解（略）撰著之時、製作圓周率之密法、而秘蔵於殊者乃此書也。余師兼庭授之復寶矣。余再授之而爲至寶秘蔵焉。本多利明謹誌　㊞

しかるに別の一枚の紙片に（この紙片はどこにあったのか？）

> 此書ハ關孝和先生ノ遺書ニシテ關流一派ノ長器ナリ。曾テ延宝（享保の誤り）年間ニ關家絶滅、其後先生ノ高弟タル建部家ノ屬客タリ。建部生ト倶ニ謀テ此圓理弧背密法ヲ造製シテ名テ綴術ト云。而コレヲ門弟子ニ授ク。余ガ師今井兼庭コレヲ得テ、後又コレヲ余ニ授ク。以テ鴻寶トス。
>
> 　　文化五戊辰年五月望　魯鈍齋利明誌

とあって三十六方位盤の印がおされてある。(略) 利明の自筆たることは確實であって、さきの巻尾の手蹟とも一致している。しかし一方では「此書は建部不休先生製作也」といひ、他方では「此書は關孝和先生の遺書」なりと矛盾せる文章は後世の人をしてすこぶる混乱に陥らしむるものである。(略) 賢弘が本書において導出した公式はすでに綴術算經に記載されているもので、ただその導き方を異にしたものである。綴術算経享保 7 年の著だから、この公式を新七の手から傳へられたといふことはあり得ない。この一事をもってしても本書は賢弘の著であって、孝和の遺書ではない。

このように『明治前日本数学史』は「円理弧背術」の原著者を建部賢弘と断定するが、異なる意見も散見する。機会があれば調べたいと思うも難問のようです。

７．汎半背冪を求める

さて、いよいよ汎半背冪 $\left(\frac{s_n}{2}\right)^2=\left(\frac{2^n a_n}{2}\right)^2$ を求めることになる。汎半背冪が求まればその諸差の極限 $(n\to\infty)$ を求めることにより、目的とする定半背冪 $\left(\frac{s}{2}\right)^2$ を求めることができる。

まず汎半背冪について、原文は次のように言う。

> 置㆓原矢㆒以㆑徑乗㆑之爲㆓二斜面冪㆒以㆓半斜數冪一㆒乗㆑之得㆓原汎半背冪㆒置㆓甲矢㆒以㆑徑乗㆑之爲㆓四斜面冪㆒以㆓半斜數冪㆒四乗㆑之得㆓甲汎半背冪㆒置㆓乙矢㆒以㆑徑乗㆑之爲㆓八斜面冪㆒以㆓半斜數冪㆒一十六乗㆑之得㆓乙汎半背冪㆒丙矢以上依㆓前術㆒得㆓各汎半背冪㆒

これは次のようになる。

原矢・径＝二斜面冪　、　二斜面冪・半斜数冪 1＝原汎半背冪= cd　、

甲矢・径＝四斜面冪　、　四斜面冪・半斜数冪 4＝甲汎半背冪= $4c_1d$　、

乙矢・径＝八斜面冪　、　八斜面冪・半斜数冪 16＝乙汎半背冪= $16c_2d$

丙矢以上も同様にして各汎半背冪を得る。因みに丙以降の汎半背冪を記せば次のようになる。

$$64c_3d\,,256c_4d\,,1024c_5d\,,4096c_6d\,,16384c_7d\,,65536c_8d\,,262144c_9d\,,1048576c_{10}d$$

原文は具体的な各汎半背冪の五差まで次の表のように求めている。表の小数は原文にないが、分数の計算結果である。

各汎半背冪	元数	一差	二差	三差	四差	五差
	cd	c^2	c^3/d	c^4/d^2	c^5/d^3	c^6/d^4
甲	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{21}{512}$
		0.25	0.125	0.078125	0.0546875	0.041015625
乙	1	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{128}$	$\frac{429}{4096}$	$\frac{2431}{32768}$	$\frac{29393}{524288}$
		0.3125	0.1640625	0.104736328125	0.074188232421875	0.0560626983642578125
丙	1	$\frac{21}{64}$	$\frac{357}{2048}$	$\frac{29325}{262144}$	$\frac{666655}{8388608}$	$\frac{32302465}{536870912}$
		0.328125	0.17431640625	0.111865997314453125	0.079471468925476074…	0.060168029740452766…
丁	1	$\frac{85}{256}$	$\frac{5797}{32768}$	$\frac{1907213}{16777216}$	$\frac{173556383}{2147483648}$	$\frac{33654160449}{549755813888}$
		0.33203125	0.176910400390625	0.113678753376007080007…	0.080818488728255033…	0.061216561241963063…
戊	1	$\frac{341}{1024}$	$\frac{93093}{524288}$	$\frac{122550285}{1073741824}$	$\frac{44616473759}{549755813888}$	$\frac{34610215507777}{562949953421312}$
		0.3330078125	0.1775608062744140625	0.114133846946060657750…	0.081156892991202767…	0.061480093030356286…
己	1	$\frac{1365}{4096}$	$\frac{1490853}{8388608}$	$\frac{7851044877}{68719476736}$	省略	省略
		0.333251953125	0.17772352695465087890625	0.11424773950420785695…	0.08124159731345770…	0.061528212653406…
庚	1	$\frac{5461}{16384}$	$\frac{23859109}{134217728}$	$\frac{502592131085}{4398046511104}$	省略	省略
		0.33331298828125	0.17776421457529067993…	0.11427622009364313271…	0.0812655554071328…	0.061544710771845…
辛	1	$\frac{21845}{65536}$	$\frac{381767589}{2147483648}$	$\frac{32167900663821}{281474976710656}$	省略	省略
		0.3333282470703125	0.17777438694611191749…	0.11428334070665258082…	0.081268075887336…	0.0615488356439106…
壬	1	$\frac{87381}{262144}$	$\frac{6108368805}{34359738368}$	$\frac{2058777711398925}{18014398509481984}$	省略	省略
		0.333332061767578125	0.17777693006792105734…	0.11428512088900860677…	0.08126939992200…	0.0615498668833312…
癸	1	$\frac{349525}{1048576}$	$\frac{97734250405}{549755813888}$	$\frac{131762286634258445}{1152921504606846976}$	省略	省略
		0.333333015441894453125	0.17777756585019233170…	0.11428556593641660005…	0.081269730932573…	0.0615501246945241…
極限		1/3	8/45	4/35	128/1575	
		0.33333333333333333…	0.17777777777777777777…	0.11428571428571428571…	0.081269841269841269…	

表のあと、汎半背冪の元数及び諸差の極限から弧背を求めることを原文は次のように言う。

各所㆑得汎半背冪ヲ以テ元數及諸差ノ極限ヲ探索ス、所謂ル極限トハ斜面孕テ弓ヲ張コトク又文廻（ブンマワシ）ヲ以テ画（エガク）ガゴトクニシテ自然ニ角ヲ減シ円欽ノ形トナル極限ヲ求ルナリ、弧背ノ術、只此一理ニ有リ、是始終ノ総括ニシテ原要ノ所ナリ

（注：文廻（ブンマワシ）とはコンパスのこと）

そして上表の小数を求め、やはり表にしている。その結果次のように言っている。

得㆑所㆑右見ルニ㆓元數及一差二差三差四差五差ノ數ヲ㆒、元數者各一個故以㆑之爲ス㆓極限㆒、一差ハ毎ニ㆑増㆑除ヲ商三ヲ長ス故ニ以㆓三分之一㆒爲一差ノ極限、二差者毎㆑増㆑除商七ヲ長ス依㆓零約術㆒得㆓四十五分之八㆒爲㆓二差ノ極限㆒、三差乗㆓七個㆒得數見㆑之次第九ヲ長ス依㆓零約術㆒得㆓三十五分之四㆒爲㆓三差極限㆒、四差乗㆓七個㆒得數見㆑之次第八ヲ長ス依㆓零約術㆒得㆓一千五

百七十五分之一百二十八㆒爲㆓四差ノ極限㆒、五差者乗㆓七個或九個㆒得數見㆑之汎半背冪ノ商一十件、故未㆑整㆑例重テ求㆓商一十三四件ヲ㆒可㆓例定㆒、故五差ヲ不㆑用而以㆓元數及一、二、三、四差㆒探㆓索諸差ノ極限ヲ㆒

二差の零約術

$$0.17777=\frac{1}{\frac{1}{0.17777}}=\frac{1}{5.62524610\cdots}$$
$$\cong\frac{1}{5.625}=\frac{8}{5.625\times 8}=\frac{8}{45}$$

つまり、一差は0.33333…に、二差は0.17777…に収束していく。従って一差の極限値は1/3であり、二差の極限は零約術により8/45になり、三差は 7 を乗じれば 9 が増加するから零約術により4/35の極限を得る。四差は 7 を乗じれば 8 が増加するから零約術により128/1575の極限を得ることになる。五差は7或は9を乗じても汎半背冪の（甲～癸）の十件では法則が整わないから、十三四件の商を求めて定めるべきという。
故に五差を用いず四差までで諸差の極限探索する、としている。

従って、求める定半背冪$\left(\frac{s}{2}\right)^2$は次のようになる。

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2=cd+\frac{1}{3}c^2+\frac{8}{45}\frac{c^3}{d}+\frac{4}{35}\frac{c^4}{d^2}+\frac{128}{1575}\frac{c^5}{d^3}+\cdots \qquad ㉔$$

８．細術

「細術」のはじめでは、上記の極限（ここでは「極数」と言っている）の求め方を零約術を含めさらに詳しく述べているが、ここでは省略する。続く「探索逐除術的例」では㉔の係数の整理(法則)を行っている。それは⑪⑫の式と同じ方法である。次のようにいう。

置㆓得㆑所右元数及一二三四差ノ極限㆒如㆑左
以㆓元數㆒除㆓一差㆒以㆓一差㆒除㆓二差㆒以㆓二差㆒除㆓三差㆒以㆓三差㆒除㆓四差㆒得数如下ノ

まず㉔の係数は以下である。

$$1,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{8}{45},\quad \frac{4}{35},\quad \frac{128}{1575}$$

相隣りの比をとると、次のようになる。

$$1,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{24}{45}=\frac{8}{15},\quad \frac{180}{280}=\frac{9}{14},\quad \frac{4480}{6300}=\frac{32}{45}$$

これを次のように変形する。

$$1,\ \frac{4}{3\cdot 4}=\frac{2^2}{3\cdot 4},\ \frac{8}{15}=\frac{4\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 2}=\frac{4^2}{5\cdot 6},\ \frac{9}{14}=\frac{3\cdot 3\cdot 4}{7\cdot 2\cdot 4}=\frac{6^2}{7\cdot 8},\ \frac{32}{45}=\frac{8\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 5\cdot 2}=\frac{8^2}{9\cdot 10}$$

よって、㉔は最終的に次のような規則性のある式になる。

$$\begin{aligned}\left(\frac{s}{2}\right)^2&=cd+1\frac{2^2}{3\cdot 4}c^2+\frac{1}{3}\frac{4^2}{5\cdot 6}\frac{c^3}{d}+\frac{8}{45}\frac{6^2}{7\cdot 8}\frac{c^4}{d^2}+\frac{4}{35}\frac{8^2}{9\cdot 10}\frac{c^5}{d^3}+\cdots\\&=cd+cd\frac{2^2}{3\cdot 4}\frac{c}{d}+\frac{c^2}{3}\frac{4^2}{5\cdot 6}\frac{c}{d}+\frac{8c^3}{45d}\frac{6^2}{7\cdot 8}\frac{c}{d}+\frac{4c^4}{35d^2}\frac{8^2}{9\cdot 10}\frac{c}{d}+\cdots\\&=cd+\text{元数}\frac{2^2}{3\cdot 4}\frac{c}{d}+\text{一差}\frac{4^2}{5\cdot 6}\frac{c}{d}+\text{二差}\frac{6^2}{7\cdot 8}\frac{c}{d}+\text{三差}\frac{8^2}{9\cdot 10}\frac{c}{d}+\cdots \qquad ㉕\\&=cd+\sum_{m=1}B_{m-1}\frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m+2)}\frac{c}{d} \qquad ㉖\end{aligned}$$

㉕が最終目的とした式である。なお、一般式の㉖は原文にはない。
B_{m-1}は、$m=1$の時は原数、$m=2,3,4\cdots$の時は$(m-1)$差でる。

（注）㉕は次のように表されることもある（｢綴術算経｣）。

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = cd + 元数\frac{1}{1\cdot 3}\frac{c}{d} + 一差\frac{2\cdot 2^2}{3\cdot 5}\frac{c}{d} + 二差\frac{3^2}{2\cdot 7}\frac{c}{d} + 三差\frac{2\cdot 4^2}{5\cdot 9}\frac{c}{d} + 四差\frac{5^2}{3\cdot 11}\frac{c}{d} + \cdots \quad ㉗$$

$$= \mathrm{cd}\left\{1 + \frac{2^2}{3\cdot 4}\left(\frac{c}{d}\right) + \frac{2^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{c}{d}\right)^2 + \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{c}{d}\right)^3 + \cdots\right\} \quad ㉘$$

なお、㉘で $d = 1, c = d/4 = 1/4$ とすると、s は円周の $1/3$ となるから次式を得る。

$$\pi^2 = 9\left(1 + \frac{1^2}{3\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 2^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots\right) \quad ㉙$$

この円周率の自乗の式は日本の最初の円周率を表す式（公式）で、$(\mathrm{arc}\,\sin x)^2$の級数展開に相当するものといわれる。この式は「円理弧背術」より前の「綴術算経」（享保７年(1722)）に既にあり、西洋では有名なオイラーがベルヌイに与えた1737年の書翰に初めて見えるもので、賢弘の発見より 15 年あとのことだったとされている。

（参考）甲乙丙丁の各矢の式を再掲しておきます。

$$c_1 = \frac{c}{4} + \frac{c^2}{16d} + \frac{c^3}{32d^2} + \frac{5c^4}{256d^3} + \frac{7c^5}{512d^4} + \frac{21c^6}{2048d^5} + \frac{33c^7}{4096d^6} + \frac{429c^8}{65536d^7} + \frac{715c^9}{131072d^8} + \frac{2431c^{10}}{524288d^9} + \frac{4199c^{11}}{1048576d^{10}} + \cdots \quad ⑩$$

$$= \frac{1\cdot c}{4} + \frac{1\cdot 3c^2}{48d} + \frac{45c^3}{1440d^2} + \frac{1575c^4}{80640d^3} + \frac{99225c^5}{7257600d^4} + \cdots$$

$$c_2 = \frac{c}{16} + \frac{5c^2}{256d} + \frac{21c^3}{2048d^2} + \frac{429c^4}{65536d^3} + \frac{2431c^5}{524288d^4} + \frac{29393c^6}{8388608d^5} + \frac{185725c^7}{67108864d^6} + \frac{9694845c^8}{4294967296d^7} + \frac{64822395c^9}{34559738368d^8} + \frac{883631595c^{10}}{549755813888d^9} + \frac{6116566755c^{11}}{4398046511104d^{10}} + \cdots \quad ⑯$$

$$= \frac{c}{16} + 元数\frac{3\cdot 5c}{6\cdot 8d} + 一差\frac{7\cdot 9c}{10\cdot 12d} + 二差\frac{11\cdot 13c}{14\cdot 16d} + 三差\frac{15\cdot 17c}{18\cdot 20d} + 四差\frac{19\cdot 21c}{22\cdot 24d} + 五差\frac{23\cdot 25c}{26\cdot 28d} + 六差\frac{27\cdot 29c}{30\cdot 32d} + 七差\frac{31\cdot 33c}{34\cdot 36d} + 八差\frac{35\cdot 37c}{38\cdot 40d} + 九差\frac{39\cdot 41c}{42\cdot 44d} + \cdots \quad ⑰$$

$$= \frac{c}{16} + \frac{15c^2}{768d} + \frac{945c^3}{92160d^2} + \frac{135135c^4}{20643840d^3} + \frac{34459425c^5}{7431782400d^4} + \cdots$$

$$c_3 = \frac{c}{64} + \frac{63c^2}{12288d} + \frac{16065c^3}{5898240d^2} + \frac{9237375c^4}{5284823040d^3} + \frac{9449834625c^5}{7610145177600d^4} + \cdots$$

$$c_4 = \frac{c}{256} + \frac{255c^2}{196608d} + \frac{260865c^3}{377487360d^2} + \frac{600772095c^4}{1352914698240d^3} + \frac{2460161729025c^5}{7792788661862400d^4} + \cdots$$

参考文献
(1)「円理弧背術」建部不休　東北大和算資料データベース（旧：和算ポータル）林文庫 911
(2)「明治前日本数学史　第二巻」日本学士院　岩波書店
(3)「圓理弧背綴術の著者について－兼庭撰と関連して」(内田孝俊、数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 210－222)

編集後記

ここまでで一応「円理弧背術」の弧を求める式まで来ました。原文はこの後、応用編なのかまだ 20 頁程あります。これも解読の対象にしたいと思っています。