やまぶき 4
田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）
第74号　令和三年(二〇二一)　三月二十五日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三―二一―二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき　和算と歴史随想」

建部不休の「円理弧背術」を学ぶ（２）

次に一差(二商)を求める。

一　以㆓初法㆒、除㆓一差實㆒、立㆓一差商㆒
〔初法($4d$)を以て一差実($-c^2/4$)を除して符号を変えた($c^2/16d$)を一差商とする。〕

二　一差商、與㆓廉數㆒、相乗〆加㆓方級㆒、爲㆓三法㆒
〔一差商廉数と乗じ方級に加え三法とす。$(c^2/16d)(-4) = -c^2/4d$ 〕

三　一差商、與㆓初法㆒、相乗〆消㆓實數㆒
〔一差商初法と乗じ実数を消す。$(c^2/16d)(4d) - c^2/4 = c^2/4 - c^2/4 = 0$ 〕

四　一差商、與㆓二法㆒、相乗〆加㆓實級㆒、爲㆓二差實㆒
〔一差商二法($-2c$)と乗じ実級を加え二差実とす。$-2c$も二法という(わかりづらい)。$(c^2/16d)(-2c) = -c^3/8d$ 〕

五　一差商、與㆓三法㆒、相乗〆加㆓實級㆒、爲㆓三差實㆒
〔一差商三法($-c^2/4d$)と乗じ実級を加え三差実とす。$(c^2/16d)(-c^2/4d) = -c^4/64d^2$ 〕

六　一差商、與㆓廉數㆒相乗〆加㆓方級㆒三法相併
〔一差商廉数(-4)と乗じ方級を加え三法と併せる。
$(c^2/16d)(-4) + (4d - 2c) - c^2/4d = 4d - 2c - c^2/2d$ 〕
この結果得られる第二変式は次式となるが、この記述は原本にはない。〕

$$\underbrace{-4}_{\text{廉}}x^2 + \underbrace{\left(\underset{\text{初法}}{4d} \underset{\text{二法}}{-2c} \underset{\text{三法}}{-\frac{c^2}{2d}}\right)}_{\text{方級}}x + \underbrace{\left(\underset{\text{二差実}}{-\frac{c^3}{8d}} \underset{\text{三差実}}{-\frac{c^4}{64d^2}}\right)}_{\text{実級}} = 0 \qquad ⑨$$

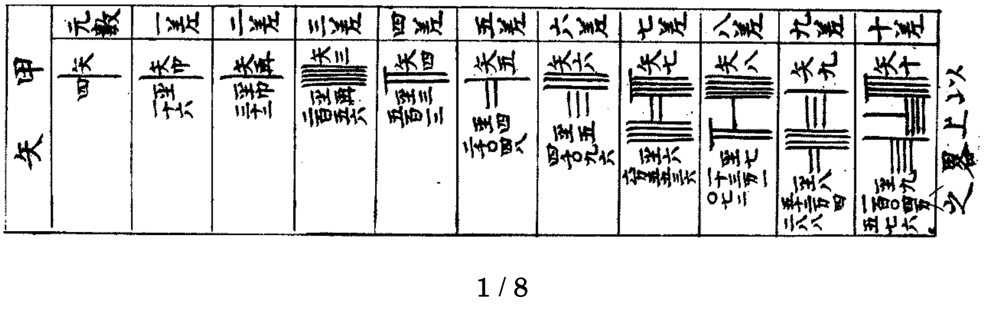
ここまでで元商（初商、元数）と一差商を求めたことになるが、原本は大変な計算（20 頁程）を行って十差商まで求めている。文章での計算は一部わかりづらい個所があるので、組立除法での計算（ホーナーの方法）を次頁に示す。

こうして得られた元数（初商）から十差商までを併せて、c_1（甲矢）を次のように得ている。

$$c_1 = \frac{c}{4} + \frac{c^2}{16d} + \frac{c^3}{32d^2} + \frac{5c^4}{256d^3} + \frac{7c^5}{512d^4} + \frac{21c^6}{2048d^5} + \frac{33c^7}{4096d^6} + \frac{429c^8}{65536d^7} + \frac{715c^9}{131072d^8} + \frac{2431c^{10}}{524288d^9} + \frac{4199c^{11}}{1048576d^{10}} + \cdots \qquad ⑩$$

（「+…」は原文にはなし）

原文は「所得開商元数及各差相併之甲矢ナリ其数列左」として下図のようにある。十差以上は略すとある。



組立除法での計算

（原式）　$-4c_1^2+4dc_1-cd=0$

No	商	廉級(2次項)	法級(1次項)	実級(定数項)
1	① $\frac{c}{4}$	② -4 （廉数）	③ $4d$ （初法）	④ $-cd$
	（元商）（初商）		⑤＝①×⑦ $-c$ （二法）	⑥＝①×⑧ $cd-\frac{c^2}{4}$
		⑦ -4	⑧＝③＋⑤ $4d-c$	⑨＝④＋⑥ $-\frac{c^2}{4}$ （一差実）
			⑩＝⑤ $-c$	
2	$\frac{c^2}{16d}$	-4	⑧＋⑩ $4d-2c$ ($-2c$も二法)	＝⑨ $-\frac{c^2}{4}$
	（一差商）		$-\frac{c^2}{4d}$ （三法）	$\frac{c^2}{4}-\frac{c^3}{8d}-\frac{c^4}{64d^2}$ （二差実）（三差実）
		-4	$4d-2c-\frac{c^2}{4d}$	$-\frac{c^3}{8d}-\frac{c^4}{64d^2}$
			$-\frac{c^2}{4d}$	
3	$\frac{c^3}{32d^2}$	-4	$4d-2c-\frac{c^2}{2d}$	$-\frac{c^3}{8d}-\frac{c^4}{64d^2}$
	（二差商）		$-\frac{c^3}{8d^2}$ （四法）	$\frac{c^3}{8d}-\frac{c^4}{16d^2}-\frac{c^5}{64d^3}-\frac{c^6}{256d^4}$ （三差実）（四差実）（五差実）
		-4	$4d-2c-\frac{c^2}{2d}-\frac{c^3}{8d^2}$	$-\frac{5c^4}{64d^2}-\frac{c^5}{64d^3}-\frac{c^6}{256d^4}$
			$-\frac{c^3}{8d^2}$	
4	$\frac{5c^4}{256d^3}$	-4	$4d-2c-\frac{c^2}{2d}-\frac{c^3}{4d^2}$	$-\frac{5c^4}{64d^2}-\frac{c^5}{64d^3}-\frac{c^6}{256d^4}$
	（三差商）			

注1：点線枠は上から、原式、第1変式、第2変式、第3変式の係数。
注2：各商は各式の定数項が消えるように次の近似値を選ぶ。

４．係数の法則

次に甲矢の係数について述べている（係数の法則の探索）。

探㆓索ス甲矢差㆒例

總テ開方ノ式ヲ開除シテ得商ノ例ヲ探會スル者多商ヲ不㆑用。唯商五六位ニシテ足リ。如何トナレハ平方ヨリ数万乗ニ至ル開方式開㆓除スルモ之㆒一商ヲ求ルモ万商ヲ求ルモ其技法一貫ナリ。因テ得商極テ一貫ノ例有テ不㆑違。例一貫ナルユヘ探㆑之商衆位ヲ用ルニ不㆑及単位ニシテ探索スベシ。此ノ理ヲ不㆑察欲㆑求ント㆓多商㆒則者徒ニ開方ノ巧ヲ費スノミ労シテ益ナシ。此モイヘニ甲矢開商ノ例六七位ヲ用テ探索ス

（注）「例」は法則という意味。「多商ヲ不㆑用」は商を多く必要とせずという意味。

題は係数の法則の探索というような意味（「例」は法則）。商を多く必要とせず、五六位で足りるといい、商を多く求めるのは徒に開方の巧を費し、労して益なしとして、甲矢の開商の六七位を用いて探索する、としている。続けて次の文がある。

置㆓甲矢ノ元数及各差㆒以㆓元数㆒除㆓一差㆒以㆓一差㆒除㆓二差㆒以㆓二差㆒除㆓三差㆒逐而以㆓前差㆒逐而除㆓後差㆒得数

元数と各差について、元数で一差を除し、一差で二差を除し、二差で三差を除し、三差で四差を除して（相隣の比をとる）、次を得ている。

$$\frac{c}{4}\quad \frac{c}{4d}\quad \frac{c}{2d}\quad \frac{5c}{8d}\quad \frac{7c}{10d}\quad \frac{3c}{4d}\quad \frac{11c}{14d}\qquad \frac{\text{右乗}}{\text{左除}} \qquad ⑪$$

二差と五差の分母子に 3 を乗じれば次のように法則性がわかる（元数と各差は）

$$\frac{c}{4}\quad \frac{c}{4d}\quad \frac{3c}{6d}\quad \frac{5c}{8d}\quad \frac{7c}{10d}\quad \frac{9c}{12d}\quad \frac{11c}{14d}\qquad \frac{\text{右乗}}{\text{左除}} \qquad ⑫$$

このことから、次を得る。

圓徑アリ原矢アリ求ル㆓甲矢㆒者
置㆓原矢㆒四除而爲㆓元數㆒　（元数 $= {}^{c}/_{4} = \frac{c}{4}$ ）
置㆓元數㆒乗㆑矢除㆑徑一乗四除而爲㆓一差㆒　（一差 = 元数$\frac{c}{4d} = \frac{c^2}{16d}$ ）
置㆓一差㆒乗㆑矢除㆑徑三乗六除而爲㆓二差㆒　（二差 = 一差$\frac{3c}{6d} = \frac{c^3}{32d^2}$ ）
置㆓二差㆒乗㆑矢除㆑徑五乗八除而爲㆓三差㆒　（三差 = 二差$\frac{5c}{8d} = \frac{5c^4}{256d^3}$ ）
置㆓三差㆒乗㆑矢除㆑徑七乗一十除而爲㆓四差㆒　（四差 = 三差$\frac{7c}{10d} = \frac{7c^5}{512d^4}$ ）
置㆓四差㆒乗㆑矢除㆑徑九乗一十二除而爲㆓五差㆒　（五差 = 四差$\frac{9c}{12d} = \frac{21c^6}{2048d^5}$ ）

従って甲矢について次式を得る。

$$c_1 = \frac{c}{4} + \frac{c}{4}\frac{c}{4d} + \frac{c^2}{16d}\frac{3c}{6d} + \frac{c^3}{32d^2}\frac{5c}{8d} + \frac{5c^4}{256d^3}\frac{7c}{10d} + \frac{7c^5}{512d^4}\frac{9c}{12d} + \frac{21c^6}{2048d^5}\frac{11c}{14d} + \cdots$$

$$= \underset{\text{元数}}{\frac{c}{4}} + \underset{\text{一差}}{\text{元数}\frac{c}{4d}} + \underset{\text{二差}}{\text{一差}\frac{3c}{6d}} + \underset{\text{三差}}{\text{二差}\frac{5c}{8d}} + \underset{\text{四差}}{\text{三差}\frac{7c}{10d}} + \underset{\text{五差}}{\text{四差}\frac{9c}{12d}} + \underset{\text{六差}}{\text{五差}\frac{11c}{14d}} + \cdots \qquad ⑬$$

なお、数係数の一般式は次のようになる。

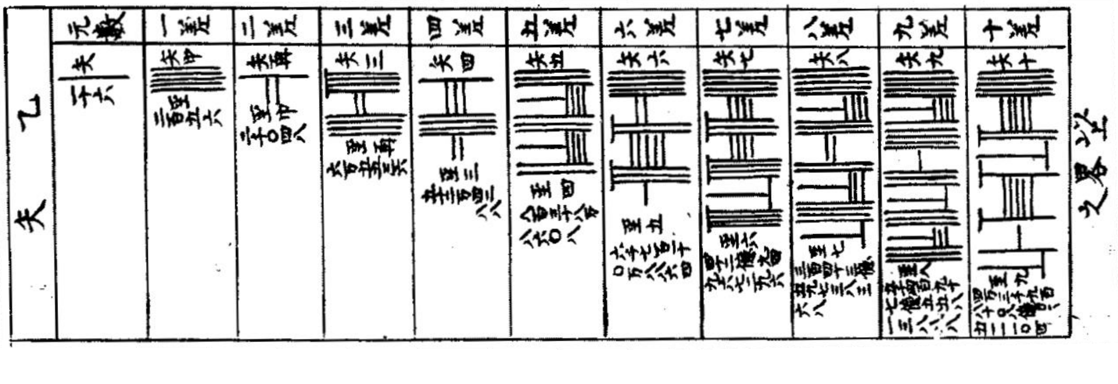
$$m\text{差の数係数}:\ \frac{1+2(m-1)}{4+2(m+1)} = \frac{2m-1}{2m+1} \qquad ⑭$$

５．乙矢を求める

次に四斜の矢である乙矢(c_2)を求める。開方式⑤は次のようになる。

$$-c_1 d + 4dc_2 - 4c_2^2 = 0 \qquad ⑮$$

原文は⑮式の c_1 に⑩式の級数（十差までの式）を挿入し、甲矢を求めたのと同じように皈除求商術により以下なような結論を得ている（計算に 4 頁程を要している）。



具体的には次のような式だが、前述の係数の法則も適用した結果も併せて記す。

$$c_2=\frac{c}{16}+\frac{5c^2}{256d}+\frac{21c^3}{2048d^2}+\frac{429c^4}{65536d^3}+\frac{2431c^5}{524288d^4}+\frac{29393c^6}{8388608d^5}+\frac{185725c^7}{67108864d^6}$$
$$+\frac{9694845c^8}{4294967296d^7}+\frac{64822395c^9}{34559738368d^8}+\frac{883631595c^{10}}{549755813888d^9}+\frac{6116566755c^{11}}{4398046511104d^{10}}+\cdots \quad ⑯$$
$$=\frac{c}{16}+\text{元数}\frac{3\cdot 5c}{6\cdot 8d}+\text{一差}\frac{7\cdot 9c}{10\cdot 12d}+\text{二差}\frac{11\cdot 13c}{14\cdot 16d}+\text{三差}\frac{15\cdot 17c}{18\cdot 20d}+\text{四差}\frac{19\cdot 21c}{22\cdot 24d}$$
$$+\text{五差}\frac{23\cdot 25c}{26\cdot 28d}+\text{六差}\frac{27\cdot 29c}{30\cdot 32d}+\text{七差}\frac{31\cdot 33c}{34\cdot 36d}+\text{八差}\frac{35\cdot 37c}{38\cdot 40d}+\text{九差}\frac{39\cdot 41c}{42\cdot 44d}+\cdots \quad ⑰$$

これで乙矢は求まった。

６．以原矢直設諸矢（原矢を以て諸矢を設ける）

次は、八斜の矢である丙矢(c_3)、さらに十六斜の矢である丁矢(c_4)を求めることになるが、これを同じ手法で求めるのは計算量が多くなり大変である。その煩雑さを避け、直ちに二斜以上の矢を求める方法について、原文は次のように言う。

依二右例一開方ヲ不レ用商ノ尾數ヲ求ム。然ルト雖モ丙丁以上ノ矢ヲ求ルニ至テハ其ノ度々ニ立天元術ヲ用テ開方式ヲ設開除スルノ功甚タ繁多ナリ。此ヲ以テ更ニ又幽ク探テ開方式ノ中ニ原矢ヲ以て直ニ二斜以上ノ矢ヲ求ル自然ノ例有コトヲ探會セリ。

そして、探会したことを次のように述べている。

總テ諸矢ノ元數及諸差ノ數ハ其ノ件々ノ實數ニ法數ノ因ル者ナリ。其ノ實數ハ各前段ノ差數逐テ相乗シテ相聚テ後段ノ實數トナル。其ノ件々ニ聚ル所ノ差數相乗ノ順ニ随テ二斜以上ノ矢ヲ求ル術ヲ會、委ク乙矢開方式ノ中ニ朱書ヲ以テ記レ之左ニ所述ノ術ト見合ベシ

具体的には「以原矢直設諸矢」として下例のように法則を求めている。まず各矢の元数を求めるところから始まる。

置原矢四除而為甲元數　　（これは、甲矢の元数 $=\frac{c}{4}$ を示す）

○甲元數ノ分子ヲ為二乙元數ノ分子一

甲元數ノ分母ニ乗レ四為二乙元數ノ分母一　　（乙矢の元数 $=\frac{c}{4}\frac{1}{4}=\frac{c}{16}$）

○乙元數ノ分子ヲ為二丙元數ノ分子一

乙元數ノ分母ニ乗レ四為二丙元數ノ分母一　　（丙矢の元数 $=\frac{d}{16}\frac{1}{4}=\frac{c}{64}$）

丁元數以上畧レ之右ノ例ニ準メ可シレ求也（丁矢以降の元数は同様に求まるので略す）

次は各矢の一差を求める。

置二甲元數一乗レ矢除レ徑又一乗四除メ而為二甲一差一　　（甲一差$=\frac{c}{4}\frac{c}{d}\frac{1}{4}=\frac{c^2}{16d}$）

（甲の元数を置き矢を乗じ径で除し、1 を乗じ 4 で除して甲一差とす）

○甲一差ノ分子四段

乙元數分子冪一段

右二位相併為二乙一差分子一

甲一差分母乗二一十六一為二乙一差分母一　　（乙矢一差$=\frac{c^2\times 4+c^2}{16d\times 16}=\frac{5c^2}{256d}$）

（甲一差の分子を 4 倍し、乙元数の分子の 2 乗とを併せて乙一差の分子とす。甲一差の分母に 16 を乗じ乙一差の分母とす）

○乙一差分子四段

丙元數分子冪一段

右二位相併為二丙一差ノ分子一

乙一差分母乗二一十六一為二丙一差分母一　　(丙矢一差$=\frac{5c^2\times4+c^2}{256d\times16}=\frac{21c^2}{4096d}$)

(乙一差の分子を 4 倍し、丙元数の分子の自乗とを併せて丙一差の分子とす。乙一差の分母に 16 を乗じ丙一差の分母とす)

丁一差以上畧レ之右ノ例ニ準メ可シレ求也 (丁矢以降の一差は同様に求まるので略す)

次は各矢の二差を求める。

置二甲一差ヲ一乗レ矢除レ徑又三乗六除而為二甲二差一　　(甲二差$=\frac{c^2}{16d}\frac{c}{d}\frac{3}{6}=\frac{3c^3}{96d^2}=\frac{c^3}{32d^2}$)

(甲の一差を置き矢を乗じ径で除し、3 を乗じ 6 で除して甲二差とす)

○甲一差ノ分子一十六段　(注：一差とあるのは二差の間違い)

乙元數分子ト乙一差分子ト相乗一段

右二位相併為二乙二差分子一

甲二差分母乗二六十四ヲ一為二乙二差分母一　　(乙矢二差$=\frac{c^3\times16+c\times5c^2}{32d^2\times64}=\frac{21c^3}{2048d^2}$)

(甲二差の分子を 16 倍し、乙元数の分子と乙一差の分子を乗じたものとを併せて乙二差の分子とす。甲二差の分母に 64 を乗じ乙二差の分母とす)

○乙二差分子一十六段

丙元數分子ト丙一差分子ト相乗一段

右二位相併為二丙二差ノ分子一

乙二差分母乗二六十四一為二丙二差分母一　　(丙矢二差$=\frac{21c^3\times16+c\times21c^2}{2048d^2\times64}=\frac{357c^3}{131072d^2}$)

(乙二差の分子を 16 倍し、丙元数の分子と丙一差の分子を乗じたものとを併せて丙二差の分子とす。乙二差の分母に 64 を乗じ丙二差の分母とす)

丁二差以上畧レ之右ノ例ニ準メ可シレ求也 (丁矢以降の二差は同様に求まるので略す)

次は各矢の三差を求める。

置二甲二差一乗レ矢除レ徑又五乗八除而為二甲三差一　　(甲三差$=\frac{c^3}{32d^2}\frac{c}{d}\frac{5}{8}=\frac{5c^4}{256d^3}$)

(甲の二差を置き矢を乗じ径で除し、5 を乗じ 8 で除して甲三差とす)

○甲三差ノ分子六十四段

乙元數分子ト乙二差分子ト相乗メ四段

乙一差分子冪一段

右三位相併為二乙三差分子一

甲三差分母乗二二百五十六ヲ一為二乙三差分母一

(乙矢三差$=\frac{5c^4\times64+c\times21c^3\times4+(5c^2)^2}{256d^3\times256}=\frac{429c^4}{65536d^3}$)

(甲三差の分子の 64 倍と、乙元数の分子と乙二差の分子を乗じ 4 倍したものと、乙一差の分子の自乗との三つを併せて乙三差の分子とす。甲三差の分母に 256 を乗じ乙三差の分母とす)

○乙三差分子六十四段

丙元數分子ト丙二差分子ト相乗四段

丙一差分子冪一段

右三位相併為二丙三差分子一

乙三差分母乗二二百五十六一為二丙三差分母一

(丙矢三差$=\frac{429c^4\times64+c\times357c^3\times4+(21c^2)^2}{65536d^3\times256}=\frac{29325c^4}{16777216d^3}$)

(乙三差の分子の 64 倍と、丙元数の分子と丙二差の分子を乗じ 4 倍したものと、丙一差の分子の自乗との三つを併せて丙三差の分子とす。乙三差の分母に 256 を乗じ丙三差の分母とす)

丁三差以上畧レ之右ノ例ニ準メ可シレ求也 (丁矢以降の三差は同様に求まるので略す)

このようにして原文は甲乙丙の各矢の七差まで求めているが、ここでは以降は省略する。規則性を示せば次のようになる。まず、甲乙丙の各矢を次のように定義する。

$$c_1=\frac{j_{10}}{k_{10}}c+\frac{j_{11}}{k_{11}}\frac{c^2}{d}+\frac{j_{12}}{k_{12}}\frac{c^3}{d^2}+\frac{j_{13}}{k_{13}}\frac{c^4}{d^3}+\cdots \qquad ⑱$$

$$c_2=\frac{j_{20}}{k_{20}}c+\frac{j_{21}}{k_{21}}\frac{c^2}{d}+\frac{j_{22}}{k_{22}}\frac{c^3}{d^2}+\frac{j_{23}}{k_{23}}\frac{c^4}{d^3}+\cdots \qquad ⑲$$

$$c_3=\frac{j_{30}}{k_{30}}c+\frac{j_{31}}{k_{31}}\frac{c^2}{d}+\frac{j_{32}}{k_{32}}\frac{c^3}{d^2}+\frac{j_{33}}{k_{33}}\frac{c^4}{d^3}+\cdots \qquad ⑳$$

そうすると、各 j,k は次のようになる。この値については七差まで求めてみる。

c_1： $j_{10}=1$,　$k_{10}=4$
$j_{11}=j_{10}\cdot 1=1\cdot 1=1$,　$k_{11}=k_{10}\cdot 4=4\cdot 4=16$
$j_{12}=j_{11}\cdot 3=1\cdot 3=3\to 1$,　$k_{12}=k_{11}\cdot 6=16\cdot 6=96\to 32$
$j_{13}=j_{12}\cdot 5=1\cdot 5=5$,　$k_{13}=k_{12}\cdot 8=32\cdot 8=256$
$j_{14}=j_{13}\cdot 7=5\cdot 7=35\to 7$,　$k_{14}=k_{13}\cdot 10=256\cdot 10=2560\to 512$
$j_{15}=j_{14}\cdot 9=7\cdot 9=63\to 21$,　$k_{15}=k_{14}\cdot 12=512\cdot 12=6144\to 2048$
$j_{16}=j_{15}\cdot 11=21\cdot 11=231\to 33$,　$k_{16}=k_{15}\cdot 14=2048\cdot 14=28672\to 4096$
$j_{17}=j_{16}\cdot 13=33\cdot 13=429$,　$k_{17}=k_{16}\cdot 16=4096\cdot 16=65536$

c_2： $j_{20}=j_{10}=1$,　$k_{20}=k_{10}\cdot 4=4\cdot 4=16$
$j_{21}=j_{11}\cdot 4+j_{20}=1\cdot 4+1=5$,　$k_{21}=k_{11}\cdot 16=16\cdot 16=256$
$j_{22}=j_{12}\cdot 16+j_{20}\cdot j_{21}=1\cdot 16+1\cdot 5=21$,　$k_{22}=k_{12}\cdot 64=32\cdot 64=2048$
$j_{23}=j_{13}\cdot 64+j_{20}\cdot j_{22}\cdot 4+j_{21}^2=5\cdot 64+1\cdot 21\cdot 4+25=429$
$k_{23}=k_{13}\cdot 256=256\cdot 256=65536$
$j_{24}=j_{14}\cdot 256+j_{20}\cdot j_{23}+j_{21}j_{22}\cdot 2=7\cdot 256+429+5\cdot 21\cdot 2=2431$
$k_{24}=k_{14}\cdot 1024=512\cdot 1024=524288$
$j_{25}=j_{15}\cdot 1024+j_{20}\cdot j_{24}\cdot 2+j_{21}j_{23}+j_{22}^2\cdot 2=21\cdot 1024+2431\cdot 2+5\cdot 429$
$+21\cdot 21\cdot 2=29393$,　$k_{25}=k_{15}\cdot 4096=2048\cdot 4096=8388608$
$j_{26}=j_{16}\cdot 4096+j_{20}\cdot j_{25}+j_{21}j_{24}+j_{22}j_{23}=33\cdot 4096+29393+5\cdot 2431$
$+21\cdot 429=185725$,　$k_{26}=k_{16}\cdot 16384=4096\cdot 16384=67108864$
$j_{27}=j_{17}\cdot 16384+j_{20}\cdot j_{26}\cdot 8+j_{21}j_{25}\cdot 4+j_{22}j_{24}\cdot 8+j_{23}^2=429\cdot 16384+185725\cdot 8$
$+5\cdot 29393\cdot 4+21\cdot 2431\cdot 8+429^2=9694845$
$k_{27}=k_{17}\cdot 65536=65536\cdot 65536=4294967296$

c_3： $j_{30}=j_{20}=1$,　$k_{30}=k_{20}\cdot 4=16\cdot 4=64$
$j_{31}=j_{21}\cdot 4+(j_{30})^2=5\cdot 4+1\cdot 1=21$,　$k_{31}=k_{21}\cdot 16=256\cdot 16=4096$
$j_{32}=j_{22}\cdot 16+j_{30}\cdot j_{31}=21\cdot 16+1\cdot 21=357$,　$k_{32}=k_{22}\cdot 64=2048\cdot 64=131072$
$j_{33}=j_{23}\cdot 64+j_{30}\cdot j_{32}\cdot 4+(j_{31})^2=429\cdot 64+1\cdot 357\cdot 4+441=29325$
$k_{33}=k_{23}\cdot 256=65536\cdot 256=16777216$
$j_{34}=j_{24}\cdot 256+j_{30}\cdot j_{33}+j_{31}j_{32}\cdot 2=2431\cdot 256+29325+21\cdot 357\cdot 2=666655$
$k_{34}=k_{24}\cdot 1024=524288\cdot 1024=536870912$
$j_{35}=j_{25}\cdot 1024+j_{30}\cdot j_{34}\cdot 2+j_{31}j_{33}+j_{32}^2\cdot 2=29393\cdot 1024+666655\cdot 2+21\cdot 29325$
$+357^2\cdot 2=32302465$,　$k_{35}=k_{25}\cdot 4096=8388608\cdot 4096=34359738368$
$j_{36}=j_{26}\cdot 4096+j_{30}\cdot j_{35}+j_{31}j_{34}+j_{32}j_{33}=185725\cdot 4096+32302465$
$+21\cdot 666655+357\cdot 29325=817500845$,
$k_{36}=k_{26}\cdot 16384=67108864\cdot 16384=1099511627776$
$j_{37}=j_{27}\cdot 16384+j_{30}\cdot j_{36}\cdot 8+j_{31}j_{35}\cdot 4+j_{32}j_{34}\cdot 8+j_{33}^2=9694845\cdot 16384$
$+817500845\cdot 8+21\cdot 32302465\cdot 4+357\cdot 666655\cdot 8+29325^2=170857676605$
$k_{37}=k_{27}\cdot 65536=4294967296\cdot 65536=281474976710656$

これから、乙矢以降（2^n斜矢で$n \geq 2$）以降の一般式は次のように得られる。これは原文には書かれていない。

$$
\begin{aligned}
c_n = \frac{1}{4^n}c &+ \frac{4j_{n-1,1} + j_{n,0}^2}{4^2 k_{n-1,1}}\frac{c^2}{d} + \frac{4^2 j_{n-1,2} + j_{n,0}j_{n,1}}{4^3 k_{n-1,2}}\frac{c^3}{d^2} + \frac{4^3 j_{n-1,3} + 4j_{n,0}j_{n,2} + j_{n,1}^2}{4^4 k_{n-1,3}}\frac{c^4}{d^3} \\
&+ \frac{4^4 j_{n-1,4} + j_{n,0}j_{n,3} + 2j_{n,1}j_{n,2}}{4^5 k_{n-1,4}}\frac{c^5}{d^4} + \frac{4^5 j_{n-1,5} + 2j_{n,0}j_{n,4} + j_{n,1}j_{n,3} + j_{n,2}^2}{4^6 k_{n-1,5}}\frac{c^6}{d^5} \\
&+ \frac{4^6 j_{n-1,6} + j_{n,0}j_{n,5} + j_{n,1}j_{n,4} + j_{n,2}j_{n,3}}{4^7 k_{n-1,6}}\frac{c^7}{d^6} + \frac{4^7 j_{n-1,7} + 8j_{n,0}j_{n,6} + 4j_{n,1}j_{n,5} + 8j_{n,2}j_{n,4} + j_{n,3}^2}{4^8 k_{n-1,7}}\frac{c^8}{d^7} \\
&\cdots\cdots \qquad ㉑
\end{aligned}
$$

次に、以下のように言う。

諸矢八差以上ヲ求ル例術ハ。開方開除ノ法ニ随テ。商方相乗シテ實級ニ聚ル所ヲ以テ如レ前索レ之ヘキナリ。仍テ八差以上求ル術畧レ之シテ繁ク不レ記也

右ノ術ニ因テ。開方開除ノ勞ナク容易諸矢ヲ求ル。尚前例ヲ試ル為二丙丁ノ両矢一ヲ設ル開方式ヲ顕ス。

（諸矢の八差以上を求める術は開方開除の法（ここまで述べた方法）に随い、商方相乗して實級に聚る所を以て前述の如く探るべきである。仍て八差以上求める術は略し、繁くは記さない。右の術に因って開方開除の労はなくなり容易に諸矢を求めることができる。尚前例を確認（検算）するために、丙丁両矢を開方式で計算してみる。）

開方式での確認は、もちろん次の二次方程式から皈除求商術により具体的に求めている。

徑(d)、乙矢(c_2)から丙矢(c_3)を求める：　$-c_2 d + 4dc_3 - 4c_3^2 = 0$　　㉒

徑(d)、丙矢(c_3)から丁矢(c_4)を求める：　$-c_3 d + 4dc_4 - 4c_4^2 = 0$　　㉓

両式の定数項の c_2，c_3 は五差までを代入して計算した後、原文（意訳）は次のようにいう。

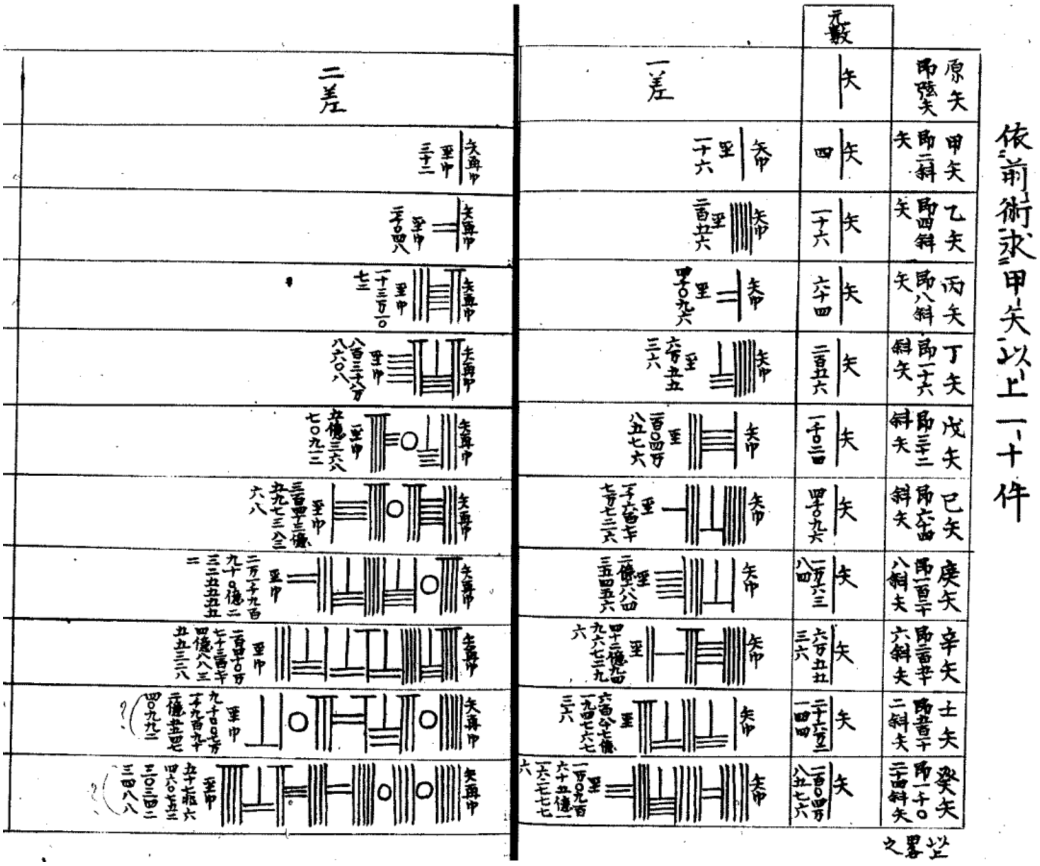
右の乙丙丁矢の開方図式を以て、前矢の諸差聚 (あつめ) て後矢の諸差となることを探会 (吟味) して、原矢を以て直に諸矢を求める易術 (容易になる術か) が整った。

茲において、甲矢以上の矢を求めることは凡そ十件 (甲から癸か) 商五六位 (五差六差ぐらい) を設け、各径及び半斜数冪 (後述) を相乗して汎半背冪 (後述) を得る。是 (この) 矢を求めることは十件に限らず、万万件の矢を求めて汎半背冪を得る必要がある。

然し先に述べた例を探索すると多位 (多くの位差) を求めることはなく、位数が少くても(解)は得られる。従って僅かに矢数十件商五六位を用いて汎半背冪を求めて、後の術に依って定背冪が得られる。

この後、「依二前術一求二甲矢一以上一十件」として、甲矢から癸矢までの十矢について五差まで求めて表にしている。因みに庚 (かのえ) 矢(c_7)は次のようになっている。

$$
\begin{aligned}
c_7 = \frac{c}{16384} &+ \frac{5461c^2}{268435456d} + \frac{23858109c^3}{2199023255552d^2} + \frac{502592131085c^4}{72057594037927936d^3} \\
&+ \frac{2927800200396959c^5}{6902958103617056817 12d^4} + \frac{363295849183585349 77c^6}{96714065569170333976 49408d^5}
\end{aligned}
$$



甲矢から癸矢までの表（部分）

（以下次号。次のような内容です）

７．汎半背冪を求める　　８．細術

参考文献

(1)「円理弧背術」建部不休　東北大和算資料データベース（旧：和算ポータル）林文庫 911

(2)「明治前日本数学史　第二巻」日本学士院　岩波書店

(3)「圓理弧背綴術の著者について－兼庭撰と関連して」（内田孝俊、数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 210－222）

編集後記

今号は、途中で次号になるのはよくないと思い、きりの良い所まで記述して８頁物となりました。目的の級数の記述は次号となります。

ところで、「円理」という語の初出は沢口一之の『古今算法記』といいます。跋文冒頭に「夫れ算道の理、総て之を謂うとき、方圓の二つ也、然るに方理は得易く、圓理は明らめ難し」とあります。「円理は和算の華」と言われ、濃い内容の史料・資料が沢山あります。後期高齢者の勉強では持ち時間との競争となり資料の選択が重要と思っています。

さて、我が小さな市では市長選の最中ですが、政治家の多選・定年について考えさせられます。立候補者は現市長で六選を目指す76歳と、元市議会議長の67歳。共に老齢の保守系で分裂選挙みたいです。政治家は後継者を育てないからこうなるのだろうか。20年も市長をやり、財政難になっても続けるという。当選すれば最後の年は80歳。歳をとれば人は体力や能力は落ちる。確かな判断等できるのか。この点、国のリーダにも怪しい人がいる。70歳過ぎたら後輩に譲るべき、その前に後輩を育てろ、と言いたい。

のどけしや一重やまぶき花ひらく