建部不休の「円理弧背術」を学ぶ（１）

やまぶき 4
田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）
第73号　令和三年(二〇二一)　三月十四日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三～二一～二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき 和算と歴史随想」

本誌 71 号で「円理弧背術を学ぶ」として、細井淙の『和算(Ⅰ)』の内容を紹介し、編集後記で今井兼庭の『円理弧背術』に挑んでいることを述べました。和算の勉強はその通りでしたが、兼庭のものを述べるには建部不休（賢弘：不休は号）の「円理弧背術」から述べた方が好都合なのがわかり、兼庭のことは取り敢えず脇に置き、建部不休の勉強に切替ました。従って、ここでは建部不休の「円理弧背術」について勉強した内容（概要）を述べます。

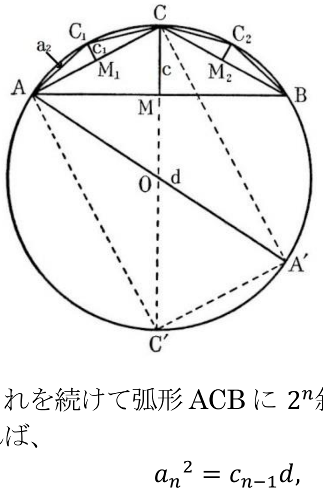
以下に述べる建部不休の「円理弧背術」は東北大学附属図書館所蔵『円理弧背術』（林文庫 911）を基本とし、文字等の確認のために（林文庫 912）も参考にしています。

林文庫 911 の本文の冒頭には、「圓理弧背術　名曰綴術　建不休先生撰　印（利明の印）」とあり、また 32 方位盤の印もある。このこと等からか管理シートの注記には「本多利明写」とある。写本のことについては文献⑵に詳しいがここでは省略する。

１．建部の円理弧背術の概要

この「円理弧背術」は、直径dの円の円欽（缺）の弦、矢、弧を$a,\ c,\ s$ で表すとき、s^2をc, d によって表す公式を導き出すものである。その概要は前文ともいうべき冒頭の次の文に表されている。

> 弧形トハ圓欽ヲ云ナリ、中闊ヲ矢ト曰、下ノ長ヲ弦ト曰、上ノ湾ヲ背ト曰、求ルノ㆑之術弧形ノ内ニ数万斜ヲ容レ、其ノ斜弦ヲ鉤トシ、傍弦ヲ股トシ、全圓徑ヲ弦トス、是ヲ以テ矩トシテ、依二句(勾)股互換之術一各矢ヲ求テ、全徑及各其半斜數冪ヲ相乗シテ各汎半背冪トシ、諸差ノ極限ヲ探會シテ、定半背冪ヲ得テ、諸差ノ例ヲ探索シテ設㆓本術ヲ㆒也。



この文の解説は文献⑵によると次のようなものである。

弧のことを背という。弧形 ACB に二斜 AC, CB を容れ、AC（斜弦）を勾とし、CA’（傍弦）を股とし、AA’（円径）を弦とすれば、一つの勾股形 ACA’が得られる。これと CMA は相似だから、AC：AA’＝CM：AC、従って AC²＝CM・AA’＝cd。この相似の関係を利用する方法を勾股互換術という。次に弧形 ACB に四斜 AC_1, C_1C, CC_2, C_2B を容れ、弧 AC の矢 C_1M_1 をc_1で表せば、

$$4c_1(d-c_1)=AC^2=cd \quad \therefore\ -4{c_1}^2+4c_1-cd=0 \qquad ①$$

これを続けて弧形 ACB に 2^n斜を容れ、その１辺をa_nとし、その弧の２倍の弧の矢をc_{n-1}とすれば、

$$ {a_n}^2=c_{n-1}d, \quad -4c_{n-1}^2+4dc_{n-1}-c_{n-2}d=0 \qquad ②$$

が成り立つ。c_{n-1}を求めてこれに全径dを乗ずれば$a_n{}^2$となり、これに$\left(\frac{2^n}{2}\right)^2$（半斜数冪という）をかけると$\left(\frac{2^n a_n}{2}\right)^2$ となる。これは弧形に内接する2^n斜の周の半分であるから、これを$\left(\frac{s}{2}\right)^2$ の近似値と考えて汎半背冪と名付ける。汎は「大凡」という意味。かくして汎半背冪$\left(\frac{s_n}{2}\right)^2$ が

$$A_0{}^{(n)}cd + A_1{}^{(n)}c^2 + A_2{}^{(n)}\frac{c^3}{d} + A_3{}^{(n)}\frac{c^4}{d^2} + \cdots \qquad ③$$

の形の無限級数で表された場合に（筆者注、後に証明されることを前提にしている）、初項を原数、2 項を第一差、3 項を第二差と呼ぶ。これ等の諸項(諸差)の$n \to \infty$における極限を求め、これを定半背冪

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = A_0cd + A_1c^2 + A_2\frac{c^3}{d} + A_3\frac{c^4}{d^2} + \cdots \qquad ④$$

とし、その各項(各差)の係数の間の関係を吟味検討(探会)して最後の公式に到達する。

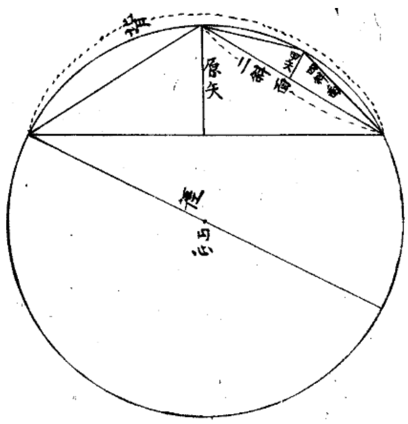
従って「円理弧背術」は、まず弦に対する矢を求め、その斜を次の弦として次の矢を求めることを繰り返す。この小さく分割された斜を必要個数分集め、その極限を求めて背(弧)の長さを求めるものである。実際は背の二乗を求めている。なお、③④式の形になることは後でわかることである。

２．開方式

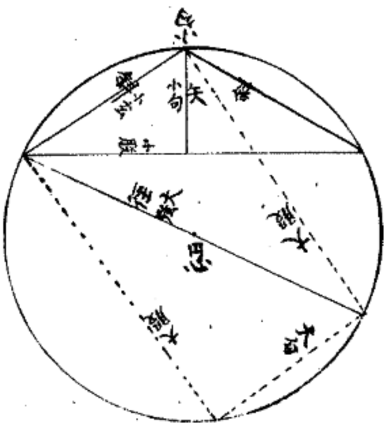
②式については、続く「演段」に次のようにある。

先如レ圖弧形之内容二二斜一、次ニ容レ二四斜一次ニ容二八斜ヲ一、次第如レ此斜數倍而求ム二各矢一。

演段図解



勾股互換之図



小勾即原矢ナリ　大弦即全円徑ナリ　相乘得數者　因二大勾一 即斜面ナリ　小弦　即斜面ナリ　也
仍徑矢相乘得數與二斜冪一適等也

これは、斜²＝矢×径 $= cd$ のことである。また次の文で②の元になる 2 次方程式を導いている。

有二全圓徑一、有二原矢一、求二甲矢一、二斜ノ矢ナリ
立二天元之一一爲二甲矢一〇＿＿＿ 以與レ徑相減相乘四二因之一
爲二二斜之面冪一〇　寄レ左、列二原矢一以レ徑相二乘之一

得數 與㆑寄㆑左相消得㆓開方式㆒

開方式

所㆑得開方式依㆓皈除求㆑商術㆒、命㆓傍書㆒平方開㆑之、得㆓甲矢㆒
皈除求㆑商術、雖別書委載之、尚爲後學茲記ス

直訳する。円径有り原矢(c)有り、甲矢 (c_1)を求める。乃ち二斜ノ矢なり。天元の一を立て甲矢とする（未知数を甲矢とする)。甲矢 $(0+c_1)$を以て径(d)から減じ（それに）甲矢を乗じ四倍して斜の冪とする。$0+4dc_1-4c_1^2$ を左に寄せ、原矢を置き径を乗じて得た数（原矢×径 $(=cd)$）を左に寄せ相消して開方式を得る。

$$-cd+4dc_1-4c_1^2=0 \qquad ⑤$$

文献(2)によると、得た開方式は「皈除求商術」（綴術のこと）に依り、「命傍書平方開之」は「数字係数の方程式を解く関の方法（西洋のホーナーの方法）を文字係数の方程式に適用するのが皈除求商術である。乗除(歸除)のみによって根(商)を求めるからこの名をつけた」とある。

円径をd、矢をc_{n-1}($n=1,2,3\cdots; c_0=$ c は原矢)とすると、一般式は以下の二次方程式となる。

$$-4c_n^2+4dc_n-c_{n-1}d=0 \qquad ⑥$$

$n=1$ のときは

$$-4c_1^2+4dc_1-cd=0 \qquad ⑦$$

廉級：-4、方(法)級：$4d$、実級：$-cd$

最後の小文字については、「この皈除求商術は『別書に委しく載すと雖も』とあるが、賢弘の書でこれを記したものは残っていない」とある。

３．甲矢を得る

二斜の矢である甲矢(c_1)をどのように得ているか、原文と共に確認する。

一 以㆓初法㆒除㆓元實㆒。立㆓元商㆒。
〔初法($4d$)を以て元実($-cd$)を除して符号を変えた(c/4)を元商(初商)とする。〕

二 元商、與㆓廉數㆒、相乗〆加㆓方級㆒、爲㆓二法㆒
〔元商廉数(-4)と乗じ方級に加え二法とする。$(c/4)(-4)+4d=4d-c$となるが、
加えるものを二法とするということで二法＝$-$c とする(以下これに倣うというがわかりづらい)。〕

三 元商、與㆓初法㆒、相乗〆消㆓實數㆒
〔元商初法と乗じ実数を消す。$(c/4)(4d)-cd=0$ 〕

四 元商、與㆓二法㆒相乗〆加㆓實級㆒、爲㆓一差實㆒
〔元商二法と乗じ実数を加え一差実とする。$(c/4)(-c)-cd=(-c^2-4cd)/4$
となるが加えるものを一差実とする。一差実＝$-c^2/4$ 〕

五 元商、與㆓廉數㆒、相乗〆加㆓方級㆒、二法相併、
〔元商廉数と乗じ方級を加え、二法と併せる。$(c/4)(-4)+4d-c=4d-2c$ 〕

この結果得られる<u>第一変式</u>は次式となるが、この記述は原本にはない。

$$\underset{\text{廉}}{-4x^2}+\underset{\text{初法}\quad\text{二法}}{(4d-2c)x}-\underset{\text{一差実}}{\frac{c^2}{4}}=0 \qquad ⑧$$

次に一差(二商)を求める。

(以下次号。次のような内容です)

３．甲矢を得る（続き）　４．係数の法則　５．乙矢を求める
６．以原矢直設諸矢（原矢を以て諸矢を設ける）　７．汎半背冪を求める
８．細術

参考文献
(1)「円理弧背術」建部不休　東北大和算資料データベース（旧：和算ポータル）林文庫 911
(2)「明治前日本数学史　第二巻」日本学士院　岩波書店
(3)「圓理弧背綴術の著者について－兼庭撰と関連して」（内田孝俊、数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 210－222）

３月１４日は円周率の日（雑学）

3 月 14 日は、円周率（π）の近似値 3.14…に因んで数学の日（円周率の日）。平成 9 年（1997 年）に日本数学検定協会が定めた。日本記念日協会も定めている。あのアインシュタインは 1879 年 3 月 14 日の生まれだという。調べると「円周率近似値の日」というのも幾つかある。

7 月 22 日：この日はヨーロッパ式では 22/7 と表記される。この区切り文字である / を割り算の記号と見なすと、アルキメデスが求めた近似値となる（下記の 1 項参照)。

11 月 10 日（閏年は 11 月 9 日）：新年から 314 日目。

12 月 21 日（閏年は 12 月 20 日）：中国における近似値の日。新年から 355 日目であり、祖沖之が求めた近似値である 355/113 の分子に由来。分母に当たる 1 時 13 分に祝われる。

さて、円周率についてランダムに雑学的に記します。

１．アルキメデスは紀元前 3 世紀に円周率πの値は次の範囲内にあること証明した。
$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$　つまり、$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$　すなわち、$3.1408\cdots < \pi < 3.1428\cdots$

２．ギリシア語で周を表すπεριμετρωζ(perimetros) の頭文字がπの由来。πを記号として初めて使ったのはＷ・ジョーンズだが、オイラーが解析学の本の中で円周率の記号として使ったので、1748 年以降一般にπを使うようになったという。

３．新聞記事やその他の資料から円周率の計算経過（当時の世界新）を示すと、
①2002 年：1 兆 2411 億桁まで計算（東大・金田康正教授）
②2009 年：2 兆 5769 億 8037 万桁（筑波大）
①の計算には 600 時間（検証時間含む）を要したが、②は 73 時間 36 分（同）と大幅短縮。
③2010 年：5 兆桁。5 兆桁目は 2 という。パソコンで 3 ヶ月。検証？（長野県・近藤氏）
④2020 年 1 月の時点では、小数点以下 50 兆桁まで計算されている。(Wikipedia)
⑤一方、和算では松永良弼が「方円算経」(1739 年）の中で 50 桁求めているのが最高。

４．円周率を求める式は幾つあるのだろうか。Wikipedia の「円周率」にある「解析」的に求める手法としては 21 種類程ある。その中には 71 号で記載したラマヌジャンの 2 式も含まれる。それ以上は難しくて不明。

５．惑星探査機「はやぶさ」のプログラムで使用された円周率は 3.141592653589793 という小数点以下が 15 桁の数字だったという。宇宙を旅するにはこれだけの精度が必要だったということか。3.14 だけでは軌道に誤差を生じるとのことだ。

編集後記

円理弧背術（建部）をゆっくりですが解読（勉強）していて、今号はその一部を載せました。次号もその続きを予定しています。その後は今井兼庭のものも載せたいと思っています。三月十四日に因んで無理に円周率のことを雑学的に書きました。書きたいことは沢山ありますがほどほどが良いかも。発行は三月十四日に無理して合せました。

ところで新型コロナの状況を懸念。より感染力が強い変異株が広がっているという。変異株には英国型・南アフリカ型・ブラジル型の三つがある。英国型と南アフリカ型の感染力は従来より1.5倍強い。ブラジル型も上昇の懸念があるという。近いうちに変異株が主流になり第四波の引き金になりかねないとも言われる。ワクチンに期待するしかないが、変異株の種類はさらに増えることもあるのだろうか。疑念は増す。

奥多摩の大岳見るや春霞