やまぶき ４

田舎の和算研究の個人通信
（題字　伊藤武夫氏）

第71号　令和二年(二〇二〇)　九月二三日
発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三〜二一〜二
山口正義　（不定期刊行）
電　話　０４２-５５５-４３５２
Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp
ホームページ　「やまぶき　和算と歴史随想」

円理弧背術を学ぶ

今井兼庭の『円理弧背術』については本誌第32号で述べましたが、それは兼庭が求めた弧背に関する結果を解読したものが主で、肝心の算出経過のことは述べませんでした。というか、解読出来なかったのでそうせざるを得なかったというのが実情でした。

　その後も歯が立たない状況が続いていましたので、少し方向転換して、兼庭の『円理弧背術』の元になった建部賢弘の同名の書を解説した『明治前日本数学史』第二巻を読むことにしました。

　ところが、この解説も結構難しく全体のストーリがよくわかりませんでした。そこでたまたま見たのが細井淙著『和算(Ⅰ)』（岩波数学講座）でした。昭和八年発行の古い本ですが野口先生から頂いたものです。この中に「建部賢弘の方法」というのがあって、非常に判り易く述べてあったので、これを転記してみました。

狭義の円理

（略）寛文３年（1663）村松茂清（浅野長矩家臣、義士村松喜兵衛の養父）が其内容を邦人に分り易い様に細述した「算俎」と云う書物を著した。書中、円周の長さの求め方に就ては方一尺なる正方形の四隅を截つて正八辺形とし、各辺上に一角を加えて正十六辺形、追て、かくの如くして 32768（＝215）辺形に及び其周を求めたのである。此時、円周率は小数第七位まで正確であったが、支那の古率と比較し 3.14 尺を以て円周の長さとした。

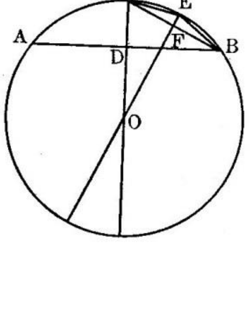
関孝和は此状況の下に於て、円周、円弧の長さを求める方法を研究し、これが所謂関流円理の創発と成ったのである。其方法は円に内接する正多角形（円弧に於ては弓形の弧に沿う等長折線）の辺数を次第に倍加し、各辺の長さを無限級数に展開して（之を綴術と云う）辺数の無限に増大した時の極限に於ける級数を求めたのである。これを円理弧背術（又は円理綴術）と云う。綴術なる語は他の意味にも用いられるが、茲では根数を無限級数に展開する事である。狭義の円理は初期の円理弧背術で、後、安島直円、和田寧の時代より、和算の高等解析の総称として円理なる術後が用いられるに至ったのである。

建部賢弘の方法

これは関孝和の高弟建部賢弘が師の遺法を記したものである。次に其大略を示す。

右図に於てOは円の中心、ABは定弦、Cは$\widehat{AB}$の中点、CDはABの垂直二等分線である。更に$\widehat{BC}$をEに於て二等分しEFをBCの垂直二等分線とする、始めに円の直径とCDの長さとを与えて$\widehat{AB}$の長さを算出するのである。

和算の術語では直径を**径**、CDを**矢**、$\widehat{AB}$を**弧背**と云う。



第１図

今直径をd、CDの長さをhとする。EFの長さをxとすれば、

$$hd=\overline{BC}^2,\ x_1(d-x_1)=\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 \text{ より }\quad 4x_1^2-4dx_1+hd=0 \quad \text{を得る。}$$

$\widehat{BE}$，次いで更に之を二等分し、追て順次に二等分した弧に対する矢の長さを夫々$x_2, x_3, x_4, \cdots$とすれば、上と同様にして

$$4x_2^2-4dx_2+x_1d=0$$
$$4x_3^2-4dx_3+x_2d=0$$
$$4x_4^2-4dx_4+x_3d=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等を得る。之等の式より$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots$等を計算すれば

$$x_1=\frac{d}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{h}{d}}\right) \qquad x_2=\frac{d}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{x_1}{d}}\right)$$
$$x_3=\frac{d}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{x_2}{d}}\right) \qquad x_4=\frac{d}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{x_3}{d}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

始めの式の平方根を$\dfrac{h}{d}$の冪級数に展開すれば(平方綴術)

$$x_1=\frac{h}{4}\left\{1+\frac{1}{4}\left(\frac{h}{d}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{h}{d}\right)^2+\frac{5}{64}\left(\frac{h}{d}\right)^3+\cdots\right\}$$

$\dfrac{h}{d}=p$にて表わし、

$$x_1=\frac{h}{4}\left(1+\frac{1}{4}p+\frac{1}{8}p^2+\frac{5}{64}p^3+\cdots\right) \tag{1}$$

之を第二式に代入して再びpの冪級数に展開する。

$$x_2=\frac{h}{4^2}\left(1+\frac{5}{16}p+\frac{21}{128}p^2+\frac{429}{4096}p^3+\cdots\right) \tag{2}$$

同様にして

$$x_3=\frac{h}{4^3}\left(1+\frac{21}{64}p+\frac{357}{2048}p^2+\frac{29325}{262144}p^3+\cdots\right) \tag{3}$$
$$x_4=\frac{h}{4^4}\left(1+\frac{85}{256}p+\frac{5797}{32768}p^2+\frac{1907213}{16777216}p^3+\cdots\right) \tag{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

各式に於けるpの同次の項の係数を列挙すれば

$$p\text{の係数}\quad \frac{1}{4},\ \frac{5}{16},\ \frac{21}{64},\ \frac{85}{256} \tag{5}$$
$$p^2\text{の係数}\quad \frac{1}{8},\ \frac{21}{128},\ \frac{357}{2048},\ \frac{5797}{32768} \tag{6}$$
$$p^3\text{の係数}\quad \frac{5}{64},\ \frac{429}{4096},\ \frac{29325}{262144},\ \frac{1907213}{16777216} \tag{7}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(5), (6), (7)の各分数を小数に直すと(5)は0.333…に、(6)は0.1777…に、(7)は各数の7倍が0.7999…に次第に近づく事を見る。之等を**零約術**(不尽数を連分数に展開する法)に依て分数に化して極限に於ける級数の各項の係数とする。

即(5)は$\dfrac{1}{3}$, (6)は$\dfrac{8}{45}$, (7)は$\dfrac{4}{35}\cdots$である。$\widehat{AB}$の二等分弧に対する矢の長さをx_1としたのであるから、2^n等分弧に対する矢の長さはx_nである。
之に対応して2^{n+1}等分弧に対する弦の長さをy_nで表せば、

$$dx_n = y_n^2$$

又$\widehat{AB}$の長さを l とすれば　$l^2 = \lim_{n\to\infty}(2^{n+1}y_n)^2 = \lim_{n\to\infty} 2^{2n+2}dx_n$
然るに$x_n = \frac{h}{4^n}(1+\cdots)$の形であるから

$$l^2 = 4dh\left(1+\frac{1}{3}p+\frac{8}{45}p^2+\frac{4}{35}p^3+\cdots\right) \text{ を得る。}$$

之を変形するために $1,\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{45},\dfrac{4}{35},\cdots$ 等の各二隣数の比 $\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{15},\dfrac{9}{14},\cdots$
等を求め且 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2^2}{3\times 4}$, $\dfrac{8}{15}=\dfrac{4^2}{5\times 6}$, $\dfrac{9}{14}=\dfrac{6^2}{7\times 8}$, $\cdots$ となす。

$$\therefore\ \ l^2 = 4dh\left(1+\frac{2^2}{3\times 4}p+\frac{2^2\times 4^2}{3\times 4\times 5\times 6}p^2+\frac{2^2\times 4^2\times 6^2}{3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8}p^3+\cdots\right)$$

括弧内の第二項以下を u_1 , u_2 , u_3 , $\cdots$ にて表せば

$$l^2 = 4dh\left(1+\frac{2^2}{3\times 4}p+\frac{4^2}{5\times 6}u_1p^2+\frac{6^2}{7\times 8}u_2p^3+\cdots\right) \qquad (8)$$

$$\left(u_1=\frac{2^2p}{3\times 4},\ \ u_2=u_1\frac{4^2p}{5\times 6},\ \ u_3=u_2\frac{6^2p}{7\times 8},\cdots\text{(この記述なし)}\right)$$

を得、之を平方に開いて l の長さを求むるのである。

和算では級数の初項は**元数**と云い、第何項と言う代りに第何**差**と云う。原著には括弧を去った式の各項に就て

$$4dh = \text{元数} \qquad \text{元数}\times\frac{2^2}{3\times 4}p = \cdots \text{とし}$$

$$l^2 = \text{元数}+\left(\text{元数}\times\frac{2^2}{3\times 4}p\right)+\left(\text{第一差}\times\frac{4^2}{5\times 6}p\right)+\left(\text{第二差}\times\frac{6^2}{7\times 8}p\right)+\cdots$$

の形式を記してある。

上の級数の第$(m+1)$項は$(\text{第}m-1\text{差})\times\dfrac{(2m)^2}{(2m+1)(2m+2)}p$ で第$m-1$差は即第m項の事である。但此一般項の形式は原書には記述がない。

註　建部賢弘著円理弧背術の大意である。享保年間関家断絶し孝和の甥新七（孝和の養子）賢弘の家に寄食した。其時新七と謀り孝和の秘書円理弧背術を校訂した物が本書であると伝えられて居る。其真偽に就ては疑問が存する。

【転記者注】

弧背冪の式は以下のように表されることも多い。

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = dh\left\{1+\frac{2^2}{3\cdot 4}\left(\frac{h}{d}\right)+\frac{2^2\cdot 4^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{h}{d}\right)^2+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{h}{d}\right)^3+\cdots\right\}$$

（以上）

ラマヌジャンのπの式の計算

インドの偉大な数学者ラマヌジャン（1887〜1920）のことは、第 43 号の編集後記で触れました。ラマヌジャンのπの計算式の二つを以下に示します。このうち、①について計算してみます。

$$① \quad \frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(4^n 99^n n!)^4}$$

$$② \quad \frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n)!(1123+21460n)}{882^{2n+1}(4^n n!)^4}$$

$$\boldsymbol{n=0}: \ \frac{0!\cdot 1103}{(4^0 99^0 0!)^4} = \frac{1103}{1} = 1103$$

1/((2*(2^0.5)/9801)*(1103))

=3.1415927300133056603139961890252155185995816（小数点以下 6 桁まで正解）

$$\boldsymbol{n=1}: \ \frac{4!\,(1103+26390)}{(4^1\cdot 99^1\cdot 1!)^4} = \frac{24(27493)}{256\cdot 99^4} = \frac{659832}{256\cdot 99^4}$$

1/((2*(2^0.5)/9801)*(1103+659832/(256*(99^4))))

=3.1415926535 8979387799 8905826306013094216645（小数点以下 15 桁まで正解）

$$\boldsymbol{n=2}: \ \frac{8!\,(1103+26390\cdot 2)}{(4^2\cdot 99^2\cdot 2!)^4} = \frac{40320(53883)}{32^4\cdot 99^8} = \frac{40320\cdot 53883}{1048576\cdot 99^8} = \frac{315\cdot 53883}{8192\cdot 99^8}$$

=2.2453850201136644169686861 5245E-13

1/((2*(2^0.5)/9801)*(1103+659832/(256*(99^4))+(315*53883)/(8192*(99^8))))

=3.1415926535 8979323846 2649065702 758898156677（小数点以下 23 桁まで正解）

3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510（正解値）

結論

n=2 で小数点以下 23 桁まで求まります。収束性が良いように思われます。

編集後記

今井兼庭の『円理弧背術』を東北大の図書館で写真を撮らせて頂いたのは定年退職した翌年の二〇〇七年四月で、十三年も前のことでした。それは千葉歳胤の資料調査で伺ったときのことで、『円理弧背術』の撮影はいわば「ついで」のことでしたが、何回見てもわからず入口から進みませんでした。

今回、細井淙著『和算(一)』を見て、目から鱗が落ちる思いでした。それで『明治前日本数学史』の記述(細かい間違いが結構ある！)もかなり(？)理解しました。そして今は兼庭の『円理弧背術』に挑んでいます。今度は少し宛ですが進んでいます。

菅総理が誕生したが危うさも感じる。官房長官のときの「指摘は当たらない」「全く問題ない」などのコミュニケーション拒否は正面から向き合っていない。沖縄の基地問題での強権的な印象は拭えない。新聞のコラムである人が「菅さんは本会議場で席が私の斜め後ろだった。安倍さんのヤジは感情だだ漏れ的なもので苦笑の範囲だったが、菅さんのヤジはもっとすごみがあってちょっと怖かった」と述べているのは菅総理の本質を言い当てているかも知れない。説明責任を果たしながら庶民の為の政治を行って欲しいと思う。

愈々、後期高齢者の仲間入りをしました。