やまぶき

田舎の和算研究の個人通信

（題字　伊藤武夫氏）

4

第70号　令和二年(二〇二〇)　八月二六日

発行者　東京都羽村市緑ヶ丘三～二一～二

山口正義　（不定期刊行）

電　話　０４２-５５５-４３５２

Eメール　hamuyama3212@kind.ocn.ne.jp

ホームページ　「やまぶき　和算と歴史随想」

組立除法で高次方程式を解く

高次方程式を組立除法で解く場合の解説は、

$$f(x) = (x - a)Q(x) + R$$

で、$R = 0$ になるようなaを選んで説明している例が多い。aの求め方を知りたいのにこれでは本末転倒のような気がしていました。

たまたま見た『関孝和全集』の中の「開方算式」の解説にヒントになるような記述を見つけました。それは「課商」「窮商」などについて説明したものでした。

『和算の事典』によれば、課商とは「商を見立てることで、仮に選定した初商から実(定数)を計算し、その過不足から初商を見立て直す。これは方程式の解αに対して、$\alpha + \mathrm{k}$ないし$\alpha - \mathrm{k}$という解をもつ方程式の求め方である」「見立てた仮の商にもとづいて変換させた式を変式という」とあり、また窮商とは「変式にある（一次の項）の係数で実を割って次商を見立てる方法で、いわゆるニュートンの近似解法と同じ」とあります。

「開方算式」には具体的な計算がありますが全てを記載できないので、課商について『算聖関孝和の業績』に要約があるので引用してみます。

$$-x^3 + 22.75x^2 - 192.1875x + 578.640625$$

を解く場合、正商５を立てて計算すると

$$-x^3 + 7.75x^2 - 39.6875x + 61.453125$$

(の変式)となり、実の余りが大きい。よってさらに正商５を立てて計算すると、

$$-x^3 - 7.25x^2 - 37.1875x - 68.234375$$

となり、各項の符号が負となり次に正商が立たなくなる。これは商が大きすぎたためで、今度は負商-1を立てて計算すると、

$$-x^3 - 4.25x^2 - 25.6875x - 37.296875$$

となるが、まだ負商がたりないので-2を立ててみると、

$$-x^3 + 1.75x^2 - 20.6875x + 5.078125$$

これで諸級の符号がもとに戻ったので、方20.6875で実5.078125を割ると約0.2なのでこれを次の商としてみると、

$$-x^3 + 1.15x^2 - 20.1075x + 1.002225$$

を得る。

方20.1075で実1.002225を割ると約0.05を得、これを三商として計算すると実は0となり、$-x^3 + x^2 - 20x + 0$　となる。この式は解けない（虚数になる）ので、

$5 + 5 - 1 - 2 + 0.2 + 0.05 = 7.25$　を定商とする。

実際に計算してみたがこれだけみるとわかりづらい。『算聖関孝和の業績』は、「初商は適数を一般に考え得難い。故にまず１から始めてみたり、題数から大きさを定めて試行する。実の余りが大きすぎる時は商が小さすぎたので、さらに同位の商を立てて計算する。この時前の計算をやりかえるのではなく、前のものに続いて行う。もしまた商を大きく立て過ぎると各項の符号がかわって同名の次商が立たなくなる。このときは異名の商を立ててすすむ。実が小さくなってもまだその数が尽きない時は、方を以て実を割り次位の商の大きさを量って次商を立てて計算する。こうして実が尽きたら立てた商の代数和を求めて商とする」とあります。

これでもやはり相当わかりづらい。和算家は苦労して高次方程式を解いていたのだ。

もっと判り易い方法はないかと文献を漁ると、『数値計算法』（奈良久他）に理路整然として次ページに示す方法が載っていました。二宮神社の算額の６次式で試みようとしたらEXCELは15桁位までしか扱えないので、68号の同等問題の６次式を利用しました。

説明は 3/4 頁を参照下さい

$$f(x) = x^6 - 313.3x^5 + 20180.8825x^4 - 481088.538x^3 + 5310844.2828x^2 - 31890794.3424x + 111354530.7168 = 0$$

基本

初期値		6乗項		5乗項		4乗項		3乗項	
14	p	1	a1	-313.3000	b1	20180.8825	c1	-481088.5380	d1
			a2	14.0000	b2=p*a3	-4190.2000	c2=p*b3	223869.5550	d2=p*c3
		1	a3=a1	-299.3000	b3=b1+b2	15990.6825	c3=c1+c2	-257218.9830	d3=d1+d2

2乗項		1乗項		定数項	
5310844.2828	e1	-31890794.3424	f1	111354530.7168	g1
-3601065.7620	e2=p*d3	23936899.2912	f2=p*e3	-111354530.7168	g2=p*f3
1709778.5208	e3=e1+e2	-7953895.0512	f3=f1+f2	0.0000	g3=g1+g2

$$f(x) = (x - 14)(x^5 - 299.3x^4 + 15990.6825x^3 - 257218.983x^2 + 1709778.5208x - 7953895.0512) = 0$$

解法

stp	Xn	6乗項	5乗項	4乗項	3乗項	2乗項	1乗項	定数項
1	10	1	-313.3000	20180.8825	-481088.5380	5310844.2828	-31890794.3424	111354530.7168
	Xn		10.0000	-3033.0000	171478.8250	-3096097.1300	22147471.5280	-97433228.1440
		1	-303.3000	17147.8825	-309609.7130	2214747.1528	-9743322.8144	13921302.5728
			10.0000	-2933.0000	142148.8250	-1674608.8800	5401382.7280	R
		1	-293.3000	14214.8825	-167460.8880	540138.2728	-4341940.0864	S
							Xn+1=Xn-R/S	13.2062
2	13.2062	1	-313.3000	20180.8825	-481088.5380	5310844.2828	-31890794.3424	111354530.7168
	Xn		13.2062	-3963.1103	214175.7947	-3524913.7831	23585427.0458	-109682674.9366
		1	-300.0938	16217.7722	-266912.7433	1785930.4997	-8305367.2966	1671855.7802
			13.2062	-3788.7055	164141.2404	-1357225.1463	5661585.8446	R
		1	-286.8875	12429.0668	-102771.5029	428705.3534	-2643781.4521	S
							Xn+1=Xn-R/S	13.8386
3	13.8386	1	-313.3000	20180.8825	-481088.5380	5310844.2828	-31890794.3424	111354530.7168
	Xn		13.8386	-4144.1303	221926.4089	-3586444.4223	23863302.4124	-111089354.5790
		1	-299.4614	16036.7522	-259162.1291	1724399.8605	-8027491.9300	265176.1378
			13.8386	-3952.6230	167227.5880	-1272246.5408	6257174.8299	R
		1	-285.6228	12084.1292	-91934.5411	452153.3197	-1770317.1001	S
							Xn+1=Xn-R/S	13.9884
4	13.9884	1	-313.3000	20180.8825	-481088.5380	5310844.2828	-31890794.3424	111354530.7168
	Xn		13.9884	-4186.8913	223730.3982	-3600029.4370	23931567.9349	-111336868.4772
		1	-299.3116	15993.9912	-257358.1398	1710814.8458	-7959226.4075	17662.2396
			13.9884	-3991.2159	167899.6610	-1251381.2751	6426742.0499	R
		1	-285.3232	12002.7753	-89458.4788	459433.5707	-1532484.3576	S
							Xn+1=Xn-R/S	13.9999
5	13.9999	1	-313.3000	20180.8825	-481088.5380	5310844.2828	-31890794.3424	111354530.7168
	Xn		13.9999	-4190.1796	223868.6969	-3601059.3770	23936866.3880	-111354422.4540
		1	-299.3001	15990.7029	-257219.8411	1709784.9058	-7953927.9544	108.2628
			13.9999	-3994.1816	167950.4403	-1249765.2258	6440242.6165	R
		1	-285.3001	11996.5213	-89269.4008	460019.6800	-1513685.3380	S
							Xn+1=Xn-R/S	14.0000
6	14.0000	1	-313.3000	20180.8825	-481088.5380	5310844.2828	-31890794.3424	111354530.7168
	Xn		14.0000	-4190.2000	223869.5550	-3601065.7618	23936899.2899	-111354530.7126
		1	-299.3000	15990.6825	-257218.9830	1709778.5210	-7953895.0525	0.0042
			14.0000	-3994.2000	167950.7550	-1249755.1924	6440326.6000	R
		1	-285.3000	11996.4825	-89268.2280	460023.3287	-1513568.4525	S
							Xn+1=Xn-R/S	14.0000
7	14.0000	1	-313.3000	20180.8825	-481088.5380	5310844.2828	-31890794.3424	111354530.7168
	Xn		14.0000	-4190.2000	223869.5550	-3601065.7620	23936899.2912	-111354530.7168
		1	-299.3000	15990.6825	-257218.9830	1709778.5208	-7953895.0512	0.0000
			14.0000	-3994.2000	167950.7550	-1249755.1920	6440326.6032	R
		1	-285.3000	11996.4825	-89268.2280	460023.3288	-1513568.4480	S
							Xn+1=Xn-R/S	14.0000

【説明】

「上段」に対象の６次方程式を示します。「基本」で初期値を 14 として組立除法を使います。計算方法を表の中に示します。定数項が０になるので $x = 14$ で割り切れ因数分解できます。各係数が表にあり、結果を下の式で示します。

「解法」は組立除法を7回繰り返しました。初期値を 10 とし、次の商 13.2062 を求めています。これをRが０になるまで繰り返しています。7回目で０になり、同時に因数分解した時の各係数も求まります。ニュートン法で求めるより計算が楽のようです。

（この稿の舌足らずをお詫びします）

参考文献
『関孝和全集』(平山・下平他)
『和算の事典』(佐藤監修)
『算聖関孝和の業績』(加藤平左エ門)
『数値計算法』(奈良久他)

今井兼庭の
三斜容三円術解読の失敗

調査の失敗事例の報告とは何とも情けない話です。

上里町出身の今井兼庭（一七一八～八〇）については本誌25号、32号で可成り詳しく述べましたが、その内25号の中で次のように述べた個所があります。

兼庭は、任意の三角形内に互いに外接する三円の直径を求めるという「三斜容三円術」の問題を「雑術」といわれる書物の中で解いたといわれます。これはマルハッチの問題とも呼ばれ、イタリアの数学者マルハッチが一八〇三年に解いているといわれますが、日本ではそれより早く安島直円が「南山子三圓術」（時期不明）で解いています。また藤田貞資が著した「三斜三圓術」は明和五年(一七六八)の著です。兼庭と安島と藤田の三人の解答の後先は不明ですが、没年からすると兼庭が最も早い時期にこの問題を解いた可能性もあります。上里町郷土資料館の兼庭の資料中にはこの問題の解き方もあるようです。

兼庭のこの「三斜容三円術」を無謀にも解読してみようと試み、敢え無く退散する羽目に成りました。

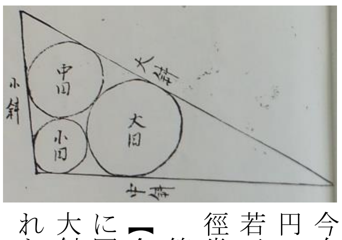
既述の引用文の前半は『埼玉県教育史』第二巻（四四八頁）や『上里町史』通史編上巻（九三〇頁）等をもとに書きましたが、これら引用文献は実際に兼庭の術を理解したか、あるいは相当の文献をみた上で書いたのか疑問を持っていました。

25号に書きましたが、今から五年前に上里町の郷土資料館で兼庭の史料（複写）の写真を撮らせて頂いています。この写真を見ながら解読に挑戦しました。

題意は明快です。

今有三斜内容如圖三円只云大斜若干中斜若干小斜若干問各円徑幾何
　答曰依左術得各円徑

【今三斜(不等辺三角形)内に図の如く三円を容れる。大斜、中斜、小斜が与えられたとき各円径は幾つか】



続く演段は傍書法で詳しく書かれています。六丁半（13頁）にも及びます。この量と、写真が不鮮明だったり虫食い個所もあり、この傍書法に取り組むには勇気が必要でした。さんざ迷った挙げ句、術文をはじめに読んで、傍書法の記述は後回しにしようとしました。

冒頭に出て来る図は何をしようとしているか少しは理解出来るのですが。

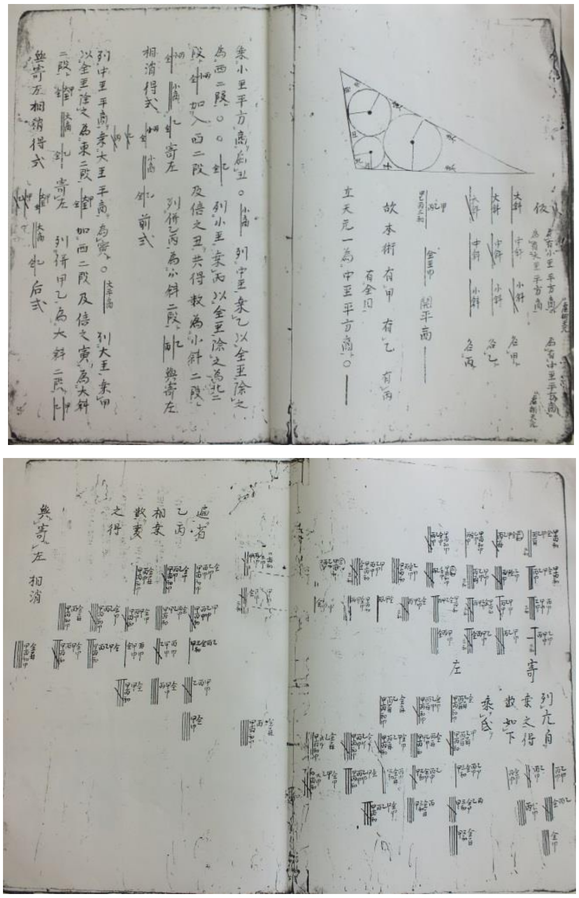
術文は次ページに示すようなものですが、不明字があります。⑤までは理解できますが、その後はうまく解読できませんでした。最後は$\boxed{三}$乗方に開いて大径を得るとあります。$\boxed{三}$乗方に開いて大径を得るという式があるかどうか、各種資料を調べましたが見つかりませんでした。

また最後にある「此術甚□□邪術也･･･」は大変気になります。ここの部分は筆記の字体が違うように思えます。兼庭以外の人が後か

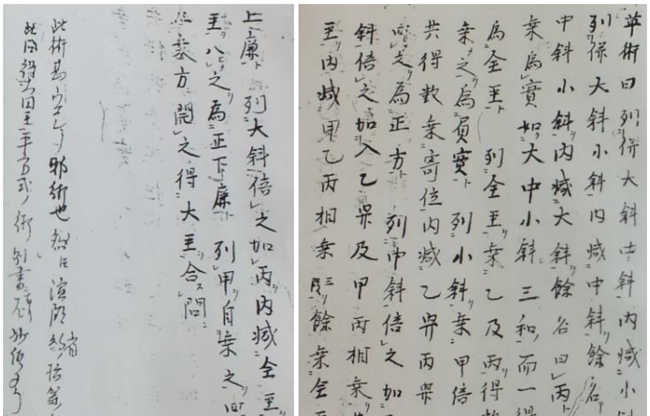
ら加筆した可能性があるのでしょうか。「邪術」ということは間違いがあるということでしょうか。不明です。
　結局わからないことが多すぎて、残念ですが解読は諦めざるを得ませんでした。

①□術曰列二併大斜中斜一内減二小斜ヲ一餘名テ曰レ甲ト
②列二併大斜小斜一内減二中斜ヲ一餘名テ曰レ乙ト　列二併
③中斜小斜ヲ一内減二大斜ヲ一餘名曰レ丙ト　甲乙丙相
④乘爲レ實如ク二大中小斜三和ノ一而一得数開二平方一
⑤爲二全徑ト一　列二全徑ヲ一乘二乙及丙ヲ一得数寄レ位　自二
⑥乘?之ヲ一爲二負實ト一　列二小斜ヲ一乘二甲倍之一加二乙□ル丙ヲ一
⑦共得数乘二寄位一内減二乙冪丙冪甲相乘数ヲ一餘
⑧□?レ之ヲ爲二正方ト一　列二中斜一倍レ之加二乙三段一乘二中
⑨斜一倍レ之加二入乙冪及甲丙相乘テ一共得数乘二全
⑩徑ト一内減二甲乙丙相乘三段一餘乘二全徑ヲ一四ヒメレ之爲二負
⑪上廉ト一　列二大斜倍レ之加レ丙ヲ内減二全徑ヲ一餘乘二甲及全
⑫徑ヲ一八ヒメレ之ヲ爲二正下廉一　列レ甲ヲ自乘之ヲ一四レ之ヲ□二負隅ト一
⑬□乘方ニ開レ之得二大徑ヲ一合スレ問

此術甚□□邪術也然?演段（以下略）



解術の傍書法による記述



術文

編集後記

算木による高次方程式の開方計算は中国では十三世紀に完成していて、それが我が国にも入ってきました。その原理はホーナーの方法と同じといいます。それは組立除法を使って効率的に近似解を求めることでもあります。この組立除法で未知の高次方程式の解を得るには具体的にどうしたら良いか今一つわかりませんでしたが、今回解法に一歩近づけました。
　算額の問題では高次方程式を導き「これを解いて解を得る」といとも簡単に記しています。本当に解いたのかと思うこともありますが、勿論解いていてそれが当然のことだから省略したというのが実情かも知れません。巧みに計算したのでしょう。
　今井兼庭の三斜容三円術では力不足を感じましたが、兼庭の円理弧背術をいつの日か解読したいと思っていますが・・・