日本学士院と学習院大学の乾坤之巻

Two volumes(KENKON-NO-MAKI) of The Japan Academy and Gakushuin University

山口　正義

YAMAGUCHI　Masayoshi

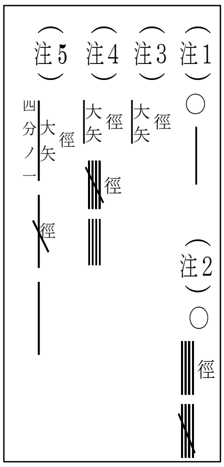
１．はじめに

「乾坤之巻」は円径と弓形の高さ(矢)から弧長を級数で表している巻物で、関流の最秘伝の書といわれ、後の和算家に大きな影響を与えてきた。著者・年記とも記述は無く不明だが（一説には享保 7～13 年頃成立とも)、「乾坤之巻は建部賢弘の綴術算経と円理綴術（円理弧背術とも）の結果を敷衍(ふえん)して、松永良弼が編纂したもの」、「円理乾坤之巻は円理弧背術を完たからしめたるものなり」[1]といわれる。

日本学士院所蔵の「乾坤之巻」[2]（坤之巻を欠く）は「藤田貞資の家に伝わったもの」[3]というだけで成立等の詳細は不明である。一方の学習院大学の「乾坤之巻」[4][5]の年紀は寛政四年閏二月二十八日、箱書に「藤田権平定資伝授之 寛政四年壬子閏二月二十八日 源頼朴[朱印]」とあり、巻物の表題は「弧背真術 乾坤」とある。徳川頼朴(よりなお)（1762～1808、紀州藩主徳川宗将(むねのぶ)の十一男）は寛政5(1793)年1月に忍藩主阿部正識(まさつね)の養子となり寛政8年に阿部家の家督を相続して8代正由(まさより)になり、享和元(1801)年7月寺社奉行、文化元(1804)年1月大坂城代、文化3年10月京都所司代と幕府の要職を歴任した。「乾坤之巻（弧背真術）」は阿部家に入家する前に取得した和算の伝授書といわれる。

ここではこの二つの「乾坤之巻」の解読結果を簡単に報告したい。筆者は学士院の「乾之巻」と学習院の「乾坤之巻の乾巻」を比べてみて改行個所まで含めてほとんど同文であることを確認した（字体は異なるように思えた)。この結果欠けている「学士院の坤之巻」は、「学習院の坤巻」とほぼ同文ではないかと推測してみた。従って以下では「学士院の乾之巻」と「学習院の坤巻」を対象とする。

２．日本学士院の「乾之巻」（分量：巻物だが本文を 61 分割したものが HP で見られる）



（１）演段

原文は以下のような設問から始まる。

今有圓徑一尺 大矢一寸如圖 半弧中容二斜 問求甲矢歩術

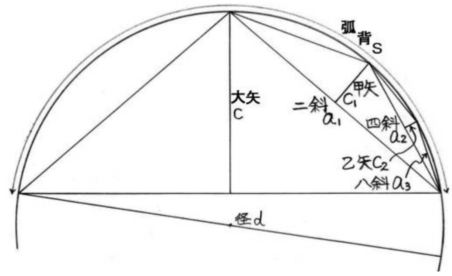
答曰　立天元一為甲矢［(注 1)］以減徑得数乗甲矢為 半弧中二斜半弦冪四之為 半弧中二斜弦冪得数［(注 2)］寄左　列大矢乗徑爲半弧中二斜弦冪［(注 3)］與 寄左相消［(注 4)］四約之［(注 5)］

これから次の関係式を得る。直径 d、大矢(原矢) c 、甲矢 c_1 、二斜 a_1 とする。

$$a_1^2 = cd \quad \left(\text{一般式は、} a_n^2 = c_{n-1}d\text{、} c_0 = c\right) \qquad ①$$

$$c_1^2 - dc_1 + cd/4 = 0 \quad \left(\text{一般式は、} c_n^2 - dc_n + c_{n-1}d/4 = 0\right) \qquad ②$$

（２）甲矢を求める



次から順次各矢を求めるが、まず②を使用して甲矢 c_1 を級数の形で詳細に計算し、第八商まで求めている。求め方は円理弧背術等の解き方と基本的には同じで、１変数の高次方程式を数値的に解く「天元術」（ホーナーの解法）の方法である。但し数字係数ではなく c, d の文字係数である。組立除法で八商まで具体的に計算してみたが、原文の数字と一致している。その後、「以下開除式略之」とし、「列併所ㇾ得之原数及諸商則爲甲矢形其式如左」とある。単純に各商（八商まで）を併せたものは次のようになる。（この式自体は原文にない）

$$c_1 = \frac{c}{4} + \frac{c^2}{16d} + \frac{c^3}{32d^2} + \frac{5c^4}{256d^3} + \frac{7c^5}{512d^4} + \frac{21c^6}{2048d^5} + \frac{33c^7}{4096d^6} + \frac{429c^8}{65536d^7} + \cdots \qquad ③$$

これを次のように変形している。

$$c_1 = 原数 + 原数\frac{1c}{4d} + 一差\frac{1c}{2d} + 二差\frac{5c}{8d} + 三差\frac{7c}{10d} + 四差\frac{3c}{4d} + 五差\frac{11c}{14d} + 六差\frac{13c}{16d} + \cdots \qquad ④$$

（３）乙矢以降を求める

乙矢 c_2 は、②の c_1 の代わりに c_2 とし、c の代わりに c_1 を用いる。次式である。

$$c_2^2 - dc_2 + \left(\frac{cd}{16} + \frac{c^2}{64} + \frac{c^3}{128d} + \frac{5c^4}{1024d^2} + \frac{7c^5}{2048d^3} + \frac{21c^6}{8192d^4} + \frac{33c^7}{16384d^5} + \frac{429c^8}{262144d^6}\right) = 0 \qquad ⑤$$

この c_2 について c_1 と同じように級数で第八商まで求めている（間違いは見つからない）。

$$c_2 = \frac{c}{16} + \frac{5c^2}{256d} + \frac{21c^3}{2048d^2} + \frac{429c^4}{65536d^3} + \frac{2431c^5}{524288d^4} + \frac{29393c^6}{8388608d^5} + \frac{185725c^7}{67108864d^6} + \frac{9694845c^8}{4294967296d^7} + \cdots \qquad ⑥$$

$$= 原数 + 原数\frac{5c}{16d} + 一差\frac{21c}{40d} + 二差\frac{143c}{224d} + 三差\frac{17c}{24d} + 四差\frac{133c}{176d} + 五差\frac{575c}{728d} + 六差\frac{261c}{320d} + \cdots \qquad ⑦$$

丙矢 c_3 、丁矢 c_4 、戊矢 c_5 についても同様に求めているが、大変な計算量である。結果のみ記す。

$$c_3 = \frac{c}{64} + \frac{21c^2}{4096d} + \frac{357c^3}{131072d^2} + \frac{29325c^4}{16777216d^3} + \frac{666655c^5}{536870912d^4} + \frac{32302465c^6}{34359738368d^5}$$
$$+ \frac{817500845c^7}{1099511627776d^6} + \frac{170857676605c^8}{281474976710656d^7} + \cdots \qquad ⑧$$

$$= 原数 + 原数\frac{21c}{64d} + 一差\frac{17c}{32d} + 二差\frac{575c}{896d} + 三差\frac{341c}{480d} + 四差\frac{533c}{704d} + 五差\frac{329c}{416d} + 六差\frac{209c}{256d} + \cdots \qquad ⑨$$

$$c_4 = \frac{c}{256} + \frac{85c^2}{65536d} + \frac{5797c^3}{8388608d^2} + \frac{1907213c^4}{4294967296d^3} + \frac{173556383c^5}{549755813888d^4} + \frac{33654160449c^6}{140737488355328d^5}$$
$$+ \frac{3407946027885c^7}{18014398509481984d^6} + \frac{2849724468517437c^8}{18446744073709551616d^7} + \cdots \qquad ⑩$$

$$= 原数 + 原数\frac{85c}{256d} + 一差\frac{341c}{640d} + 二差\frac{2303c}{3584d} + 三差\frac{91c}{128d} + 四差\frac{2133c}{2816d} + 五差\frac{9215c}{11648d} + 六差\frac{4181c}{5120d} + \cdots \qquad ⑪$$

$$c_5 = \frac{c}{1024} + \frac{341c^2}{1048576d} + \frac{93093c^3}{536870912d^2} + \frac{122550285c^4}{1099511627776d^3} + \frac{44616473759c^5}{562949953421312d^4}$$
$$+ \frac{34610215507777c^6}{576460752303423488d^5} + \frac{14020179936958061c^7}{295147905179352825856d^6} + \frac{46897501889124714045c^8}{120892581961462907470617 6d^7} + \cdots \qquad ⑫$$

$$= 原数 + 原数\frac{341c}{1024d} + 一差\frac{273c}{512d} + 二差\frac{9215c}{14336d} + 三差\frac{5461c}{7680d} + 四差\frac{8533c}{11264d} + 五差\frac{36863c}{46592d} + 六差\frac{3345c}{4096d} + \cdots ⑬$$

（４）総括

「乾之巻総括」の初めに矢についての生率と通率の定義があるが少し紛らわしい。生率は④⑦⑨⑪⑬式の係数を言い、通率は規則性を明らかにするためのものである。その一般則を次の様に述べている。

1) 倍数は2倍、加数は斜数の二乗の2倍（斜数は2、4、8、16、32のように倍数となっている）を意味する。

2) 原数は斜数の二乗で大矢を除した数

（例： c_1の原数 $1/2^2 = 1/4$, c_2の原数 $1/4^2 = 1/16$, c_3の原数 $1/8^2 = 1/64$ ）

3) 諸斜の一差（通率の場合）は「乗率者斜数冪ノ内減一得数、除率者斜数冪三段」とある。

（例：c_1の一差通率 $(2^2 - 1)/(2^2 \times 3) = 3/12$ ； c_2の一差通率$(4^2 - 1)/(4^2 \times 3) = 15/48$
； c_3の一差通率 $(8^2 - 1)/(8^2 \times 3) = 63/192$ ）

4) 諸斜の二差は「求乗率術曰置㆓一差乗率㆒倍㆑之加㆓加数㆒内減㆑一得数求除率術曰置㆓一差除率㆒倍㆑之加㆓加数㆒内減㆓斜数冪半段㆒得数」(二差の乗率は一差乗率を2倍し加数(2斜の二乗の2倍)から1を減じたものを加える、除率は一差除率を2倍し加数から2斜の二乗の半分を減じたものを加える）とあるが、「1

を減じ」は「1を加え」の間違いと思われる。

例：c_1の二差乗率 $3\times2+2^2\times2+1=15$, 二差除率 $12\times2+2^2\times2-2^2\times0.5=30$ ∴ 二差通率 $=15/30$

c_2の二差乗率 $15\times2+4^2\times2+1=63$, 二差除率 $48\times2+4^2\times2-4^2\times0.5=120$ ∴ 二差通率 $=63/120$

c_3の二差乗率 $63\times2+8^2\times2+1=255$, 二差除率 $192\times2+8^2\times2-8^2\times0.5=480$ ∴ 二差通率 $=255/480$

5) 諸斜の三差以上は「三差以上の乗率は前差乗率を2倍し加数(その斜の二乗の2倍)から前々差乗率を減じたものを加える、除率も同様で前差除率を2倍し加数から前々差除率を減じたものを加える」

例：c_1の三差乗率 $15\times2+2^2\times2-3=35$, 三差除率 $30\times2+2^2\times2-12=56$ ∴ 三差通率 $=35/56$

c_2の三差乗率 $63\times2+4^2\times2-15=143$, 三差除率 $120\times2+4^2\times2-48=224$ ∴ 三差通率 $=143/224$

c_3の三差乗率 $255\times2+8^2\times2-63=575$, 三差除率 $480\times2+8^2\times2-192=896$ ∴ 三差通率 $=575/896$

この後 2,4,8,16,32 斜（甲～戊の矢に対応）の九差までの生率・通率の以下の表 1 を示して終わっている。

半弧中二斜矢 乃括要算法所謂四斜之勾也（甲矢）	差	一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{20}$
	通率	$\frac{3}{12}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{35}{56}$	$\frac{63}{90}$	$\frac{99}{132}$	$\frac{143}{182}$	$\frac{195}{240}$	$\frac{255}{306}$	$\frac{323}{380}$

「通率」の下に「自ラ倍シ減レ前加レ八得数」とあり。

半弧中四斜矢 乃括要算法所謂八斜之勾也（乙矢）		一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{143}{224}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{133}{176}$	$\frac{575}{728}$	$\frac{261}{320}$	$\frac{341}{408}$	$\frac{259}{304}$
	通率	$\frac{15}{48}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{143}{224}$	$\frac{255}{360}$	$\frac{399}{528}$	$\frac{575}{728}$	$\frac{783}{960}$	$\frac{1023}{1224}$	$\frac{1295}{1520}$

「通率」の下に「自倍減前加三十二」とあり。

半弧中八斜矢 乃括要算法所謂一十六斜之勾也（丙矢）		一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{21}{64}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{575}{896}$	$\frac{341}{480}$	$\frac{533}{704}$	$\frac{329}{416}$	$\frac{209}{256}$	$\frac{455}{544}$	$\frac{5183}{6080}$
	通率	$\frac{63}{192}$	$\frac{255}{480}$	$\frac{575}{896}$	$\frac{1023}{1440}$	$\frac{1599}{2112}$	$\frac{2303}{2912}$	$\frac{3135}{3840}$	$\frac{4095}{4896}$	$\frac{5183}{6080}$

「通率」の下に「自倍減前加一百二十八」とあり。

半弧中一十六斜矢 乃括要算法所謂三十二斜之勾也（丁矢）		一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{85}{256}$	$\frac{341}{640}$	$\frac{2303}{3584}$	$\frac{91}{128}$	$\frac{2133}{2816}$	$\frac{9215}{11648}$	$\frac{4181}{5120}$	$\frac{5461}{6528}$	$\frac{4147}{4864}$
	通率	$\frac{255}{768}$	$\frac{1023}{1920}$	$\frac{2303}{3584}$	$\frac{4095}{5764}$ *	$\frac{6399}{8448}$	$\frac{9215}{11648}$	$\frac{12543}{15360}$	$\frac{16383}{19584}$	$\frac{20735}{24320}$

「通率」の下に「自倍減前加五百一十二」とあり。*原文は5764とあるが5760が正しい。

半弧中三十二斜矢 乃括要算法所謂六十四斜之勾也（戊矢）		一	二	三	四	五	六	七	八	九
	生率	$\frac{341}{1024}$	$\frac{273}{512}$	$\frac{9215}{14336}$	$\frac{5461}{7680}$	$\frac{8533}{11264}$	$\frac{36863}{46592}$	$\frac{3345}{4096}$	$\frac{1285}{1536}$	$\frac{82943}{97280}$
	通率	$\frac{1023}{3072}$	$\frac{4095}{7680}$	$\frac{9215}{14336}$	$\frac{16383}{23040}$	$\frac{25599}{33792}$	$\frac{36863}{46592}$	$\frac{50175}{61440}$	$\frac{65535}{78336}$	$\frac{82943}{97280}$

「通率」の下に「自倍減前加二千〇四十八」とあり。

表 1

３．学習院大学の「坤巻」（分量：マイクロフィルム化されていた巻物を 18 分割してコピーさせて頂いた）

巻首の文中に「關夫子斜数ヲ用ヒズ自然ト乗除率ノ数ヲ求メンｺﾄヲ工夫シテ」とあり、「乾坤之巻」は関孝和の著述であるかのように言っているが、勿論そのような評価は今はない。

続いて矢の級数展開の各項の係数についての記述がある。まず、二斜から三十二斜の一差から七差までの通率の値の表２（表１の通率に同じ）を掲げる。この値に対して「各乗率に 1 を加え除率はそのままにしたものを実とし、各分母分子を斜数冪で除して乗率除率を得て」として表３を掲げる。この値は斜を増やしたときの収束値を示している。

表２

		半弧中二斜	半弧中四斜	半弧中八斜	半弧中十六斜	半弧中三十二斜
一差	乗率	3	15	63	255	1023
	除率	12	48	192	768	3072
二差	乗率	15	63	255	1023	4095
	除率	30	120	480	1920	7680
三差	乗率	35	143	575	2303	9215
	除率	56	224	896	3584	14336
四差	乗率	63	255	1023	4095	16383
	除率	90	360	1440	5760	23040
五差	乗率	99	399	1599	6399	25599
	除率	132	528	2112	8448	33792
六差	乗率	143	575	2303	9215	36863
	除率	182	728	2912	11648	46592
七差	乗率	195	783	3135	12543	50175
	除率	240	960	3840	15360	61440

表３

斜数各半弧中之数後倣之		二斜	四斜	八斜	十六斜	三十二斜
一差	乗率	1	1	1	1	1
	除率	3	3	3	3	3
二差	乗率	4	4	4	4	4
	除率	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5
三差	乗率	9	9	9	9	9
	除率	14	14	14	14	14
四差	乗率	16	16	16	16	16
	除率	22.5	22.5	22.5	22.5	22.5
五差	乗率	25	25	25	25	25
	除率	33	33	33	33	33
六差	乗率	36	36	36	36	36
	除率	45.5	45.5	45.5	45.5	45.5
七差	乗率	49	49	49	49	49
	除率	60	60	60	60	60

表３から一般式として乗率が m^2 で、除率が $(2m+1)(m+1)\times0.5=\{(2m+3)m+1\}\times0.5$（招差積）を導出している。また表２からは乗率が $(m^2\cdot2^{2n}-1)$ 、除率が $2^{2n}(2m+1)(m+1)\times0.5=2^{2n}\{(2m+3)m+1\}\times0.5$ を導出している。ここで第数を m (m差のこと)、斜数を 2^n としている。

この後、矢の一般式を次のように述べている。

$$c_n=\frac{大矢}{斜数冪}+\frac{大矢冪\cdot一差乗率}{斜数冪\cdot径\cdot一差除率}+\frac{大矢再\cdot一差乗率\cdot二差乗率}{斜数冪\cdot径冪\cdot一差除率\cdot二差除率}+\cdots$$

$$=\frac{c}{2^{2n}}+原数\frac{一差乗率}{一差除率}\frac{c}{d}+一差\frac{二差乗率}{二差除率}\frac{c}{d}+二差\frac{三差乗率}{三差除率}\frac{c}{d}+\cdots \qquad ⑭$$

$$\left(=\frac{c}{2^{2n}}+\sum(m-1)差\cdot\frac{2(m^2\cdot 2^{2n}-1)}{2^{2n}(2m+1)(m+1)}\cdot\frac{c}{d}\right) \qquad ⑮$$

そして全弧汎背冪 s_{n+1}^2 を次のように求めている（汎は大凡の意）。

$$s_{n+1}^2=\frac{大矢\cdot径\cdot斜数冪\cdot4}{斜数冪}+\frac{大矢冪\cdot一ノ乗率\cdot斜数冪\cdot4}{斜数冪\cdot一ノ除率}+\frac{大矢再\cdot一ノ乗率\cdot二ノ乗率\cdot斜数冪\cdot4}{斜数冪\cdot一ノ除率\cdot二ノ除率\cdot径}+\cdots$$

$$=4cd+原数\frac{一ノ乗率}{一ノ除率}\frac{c}{d}+一差\frac{二ノ乗率}{二ノ除率}\frac{c}{d}+二差\frac{三ノ乗率}{三ノ除率}\frac{c}{d}+\cdots \qquad ⑯$$

これは以下と同じことを意味する（①式の応用）。

$$s_{n+1}^2=2^{2n+2}c_nd=2^{2n+2}d\left\{\frac{c}{2^{2n}}+\sum(m-1)差\cdot\frac{2(m^2\cdot 2^{2n}-1)}{2^{2n}(2m+1)(m+1)}\cdot\frac{c}{d}\right\}$$

$$=4cd+\sum(m-1)差\cdot\left(m^2-\frac{1}{2^{2n}}\right)\frac{2}{(2m+1)(m+1)}\cdot\frac{c}{d} \qquad ⑰$$

ここで、「$1/2^{2n}$」について原文は「斜数至テ多キトキハ此数至テ微ナリ故ニ斜数ノ多極数ヲ幽(フカ)ク捜(サグリ)テ此数ヲ消シ斜数ヲ離レテ真背ノ乗除率ヲ求ム如後条」と注釈し、その後続けて、「右斜数冪多極数ヲ増約シテ乗率ノ内、$-1/$斜数冪$(=-1/2^{2n})$ 此数ヲ消シテ真背乗除率ヲ得ル如左」といっている。これは重要な部分で、$n\to\infty$ とすれば $1/2^{2n}\to 0$ となることを言っていて、そのことにより真背（定背）が求まるとしている。

従って、⑯⑰式を参考にすれば弧背真術は次式となるが、これらの式は原文には書かれていない。ただ、⑲式の係数が分数で 30 差まで記述されているのみである。

$$s^2=4cd+\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)差\cdot\frac{m^2}{\{(2m+3)m+1\}\times 0.5}\cdot\frac{c}{d}=4cd+\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)差\cdot\frac{(2m)^2}{(2m+1)(2m+2)}\cdot\frac{c}{d} \qquad ⑱$$

$$=4cd+原数\frac{1}{3}\cdot\frac{c}{d}+一差\frac{4}{7.5}\cdot\frac{c}{d}+二差\frac{9}{14}\cdot\frac{c}{d}+三差\frac{16}{22.5}\cdot\frac{c}{d}+\cdots \qquad ⑲$$

$$=4cd+原数\frac{2^2}{3\cdot4}\cdot\frac{c}{d}+一差\frac{4^2}{5\cdot6}\cdot\frac{c}{d}+二差\frac{6^2}{7\cdot8}\cdot\frac{c}{d}+三差\frac{8^2}{9\cdot10}\cdot\frac{c}{d}+\cdots \qquad ⑳$$

最後の跋文の後に「關新助藤原孝和　荒木彦四郎藤原村英　松永安右衛門源良弼　山路彌左衛門平主住　藤田権平源貞資　寛政四年壬子　閏二月二十八日」とある。

４．おわりに

日本学士院と学習院大の「乾坤之巻」の解読を浅学菲才をも省みず挑戦してみた。一字一句全て厳密に解読できた訳ではないが、先人たちの「計算」能力や「無限」に対する考えを具体化する知恵に圧倒された。本稿は原文から省略した個所も多く、また建部賢弘著とされる「円理弧背術」などとの関係も述べる必要があったが、駆け足での説明のため適わなかった。今後の課題としたい。

参考文献

(1)『増修日本数学史』P227上段①、及び P259上段②の平山諦の記述（昭和35年か）
(2) 資料番号329。大正7年に貞資の子孫より寄贈され現在重要文化財。学士院のHPで詳細な画像が公開されている。
(3)『明治前日本数学史 第二巻』P479
(4) 学習院大学史料館 陸奥国棚倉藩主・華族 阿部家資料「弧背真術」（資料番号 1690－１・２）
(5) この資料の存在は、藤田雄山貞資先生顕彰会講演会「藤田貞資と紀州徳川家」（講師は佐藤賢一先生、2019年4月29日）を拝聴して知りました。
(6) 加藤平左エ門『算聖関孝和の業績』（槇書店、昭和47年）P216～221、425～455